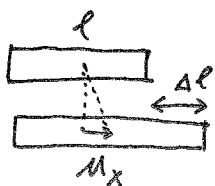


# Prútné vlastnosti látek

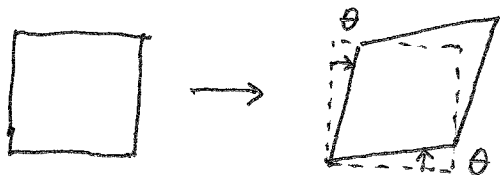
• Tensor deformácie: bod  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{u}(\vec{r})$



$$u_x = \frac{\Delta l}{l} \cdot x \equiv u_{xx} x$$

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \text{bezrozmerná relatívna deformácia}$$

ina' deformácia:

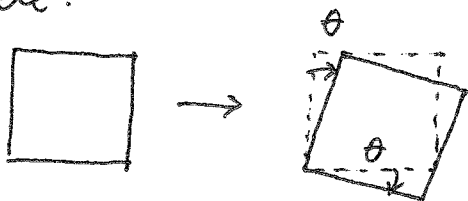


$$u_x = \theta y$$

$$u_y = \theta x$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} = \theta$$

ale:



$$u_x = \theta y$$

$$u_y = -\theta x$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\partial u_y}{\partial x} \quad \text{čistá rotácia!}$$

→ Definujeme 
$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{tensor deformácie}$$

$$u_{ij} = u_{ji}$$

miera deformácie (relatívnej); pre čistú rotáciu = 0

Pred deformáciou: body  $\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r} \dots$  vzdialenosť  $dx$

po deformácii:

body  $\vec{r} + \vec{u}(\vec{r}), \vec{r} + d\vec{r} + \vec{u}(\vec{r} + d\vec{r})$   
vzdialenosť  $dx' = dx + u_{xx} dx$

Zmena objemového elementu:  $dx dy dz = dV \rightarrow dx' dy' dz' = dV'$

Máme  $dV' = dV(1 + u_{xx})(1 + u_{yy})(1 + u_{zz}) \rightarrow \boxed{\frac{dV'}{dV} = 1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{u}}$

Neskačiklívne' médiá:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \equiv u_{ii} = 0$ .

Príklady: 1. pružné (elastické) vlastnosti: po vyznačení pôsobiacich síl deformácie trvajú

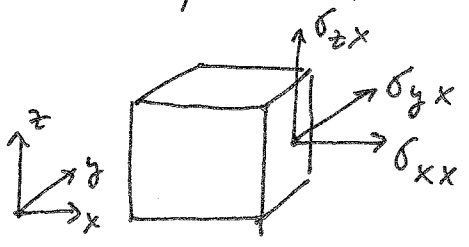
2. predpokladali sme malé deformácie  $|u_{ij}| \ll 1$

# Tensor napätia

predpoklad: vily v mediu m' krakodoralove' → vlove' fôrovanie na objemov' element možno redukovat' na fôrovanie tlaku na povrchu elementu; preto vlna  $f_i$  musí byt' divergenciou nejakej veličiny  $\sigma_{ik}$ :

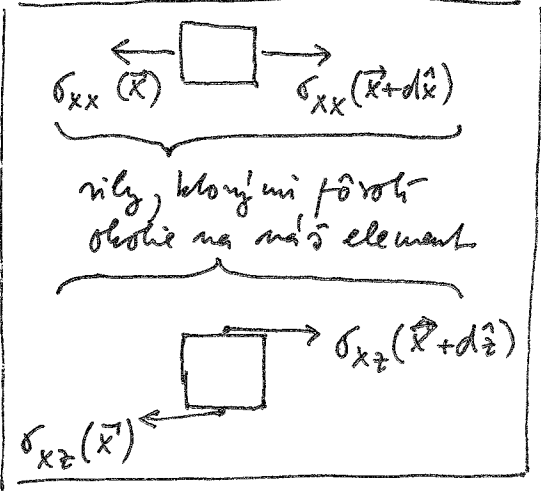
$$\int f_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} dS_k$$

vlna, ktorou fôrujú okolie na element;  $d\vec{S} = dS \vec{n}$ ;  $\vec{n}$  = v. smer vonku, normálny k elementu



$\sigma_{ij}$  = tlak v smere  $i$  na plochu s normálou  $j$

$\sigma_{ij} n_j$  = tlak na plochu s normálou  $\vec{n}$  (ktorou sa zvažuje normála)



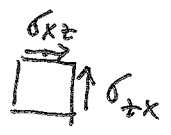
$$f_x dx = \sigma_{xx}(x+dx) - \sigma_{xx}(x)$$

natiahovanie:  $\sigma > 0$

sťahovanie:  $\sigma < 0$

kvantujeme iba  $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$

(aký moment vŕt = 0)



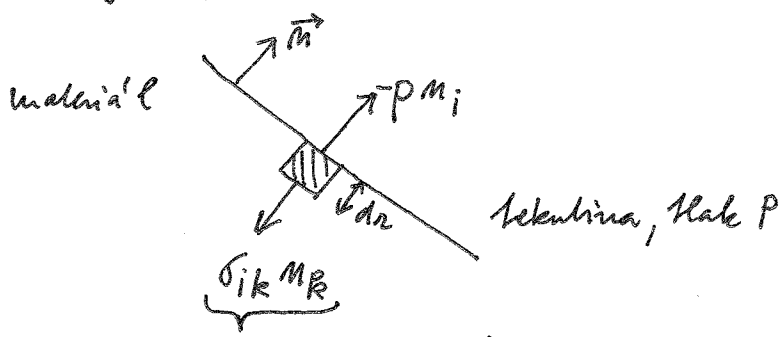
Polykroná rovnica:

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i$$

objemová vlna napr.  $\vec{f} = \rho \vec{g}$  (gravitácia)

suma rozdier tlakov

Okrajová podmienka:



tlak, ktorým tlakuje materiál na povrchový element

keďže  $da \rightarrow 0$ , musia byť tlaky na povrchu rovnaké:

$$\sigma_{ik} n_k = -p n_i$$

pri natiahovaní zvonka:

$$\sigma_{ik} n_k = +p n_i$$

## Termodynamika deformácie

pri posunutí  $\delta \vec{u}$  systém koná prácu

symetrický tenzor

$$\int dV f_i \delta u_i = \int dV \partial_k \sigma_{ik} \delta u_i = \underbrace{\int dV \partial_k (\sigma_{ik} \delta u_i)}_{=0 \text{ lebo } \delta \vec{u}=0 \text{ na hranici}} - \underbrace{\int dV \sigma_{ik} \delta (\partial_k u_i)}_{\substack{\text{symetrický tenzor} \\ \downarrow}} = \int dV \sigma_{ik} \delta u_{ik}$$

→ zmena ľubovoľnej voľnej energie

$$dF = \sigma_{ik} du_{ik} - SdT \rightarrow \boxed{\sigma_{ik} = \left( \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T} (*)$$

## Hookeov zákon

nedeformovaný kryštál je v minimálnej voľnej energii. Preto očakávame (pre malé deformácie)

$$\boxed{F = F_0 + \frac{1}{2} C_{ijkl} u_{ij} u_{kl}}$$

Symetrické konštanty C:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (1)$$

$$C_{ij,kl} = C_{ji,kl} \text{ atď.} \quad (2)$$

krôli (2):  $6 \times 6$  prvkov matice C

krôli (1):  $6+5+4+3+2+1 = 21$  prvkov nesúvislých (maximálne)

Počet nesúvislých prvkov  $C_{ijkl}$ : závisí od symetrie kryštálu

prvky symetria | kubickeho kryštálu --- 21

↓ kubickeho kryštálu --- 3

↓ izotropne kontinuum --- 2 (polykryštály, skla, ...)

oddiel 2 a (\*) máme  $\boxed{\sigma_{ik} = C_{ijkl} u_{kl}}$  Hooke  $C_{ijkl}$ : vzťah = Hooke

Izotropne kontinuum (=energia vzniká od natočenia kryštálu)

$$\boxed{F = F_0 + \frac{\lambda}{2} (u_{ii})^2 + \mu u_{ij} u_{ij}} \quad \lambda, \mu: \text{Lamého koeficienty}$$

(stopa matice  $u_{ij}$ )<sup>2</sup>

niekoľko štvorcov veľkých prvkov matice  $u_{ij}$

critéria:

uvažujeme vznikajúci F od zloženého súv. sústav

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \rightarrow \boxed{\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \text{div} \vec{u} + 2\mu u_{ij}} \text{ Hooke}$$

Hooke  $\rightarrow \sigma_{ij} = (3\lambda + 2\mu) u_{ij} \rightarrow$  invertovaná transformácia:

$$\boxed{u_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk}} \quad (*)$$

• Hydrostatický tlak: hraničná podm.  $\sigma_{ik} u_k = -p u_i$  na celom povrchu  
 $\rightarrow$  možno zvoliť  $\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}$ ;  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$

dosadiť do (\*): ~~hlavne~~  $u_{ij} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = -\frac{3p}{3\lambda + 2\mu}$

modul objemovej kompatibility:

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T ; \text{ pri tom } V \rightarrow V + \vec{v} \cdot \vec{n} V$$

$$\text{preto } \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = V \left( \frac{\partial \vec{v} \cdot \vec{n}}{\partial p} \right)_T = -\frac{3V}{3\lambda + 2\mu}$$

$$\boxed{K = \lambda + \frac{2}{3}\mu}$$

podmienka stability:  $\boxed{K > 0}$

(inak fluktuácie zmeny objemu sú veľké)

• Homogénne natiahnutie

$$\sigma_{zz} \neq 0$$

ostatné  $\sigma_{ij} = 0$  (keďže uvažujeme tlak na bohy)



$$\frac{\delta L}{L} = u_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz}$$

$$\boxed{E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}}$$

Youngov modul  
 pri napätí  $= 0$

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{zz}$$

$$\boxed{-\frac{u_{xx}}{u_{zz}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \nu}$$

Poisson

nevyhnutná podmienka  $E \neq 0$ :

$$\boxed{\mu \neq 0}$$

$\rightarrow$  voliteľnosť  
 súčiastky majú  
 "stály tvar"

Termodynamika ( $K > 0, \mu > 0$ )

diktuje:

$$\boxed{-1 < \nu < \frac{1}{2}}$$

pre  $\nu < 0$  látky s natiahnutím hľadajú!

(Termodynamicky možno a realizuje sa v tv. anizotropných materiáloch!)

|             | E (GPa) | $\nu$ |
|-------------|---------|-------|
| guma        | 0,0005  | 0.5   |
| liak slovo  | 5       | 0.5   |
| sklo        | 55      | 0.16  |
| liak železo | 110     | 0.3   |
| ocel        | 200     | 0.3   |
| wolfram     | 400     | 0.3   |

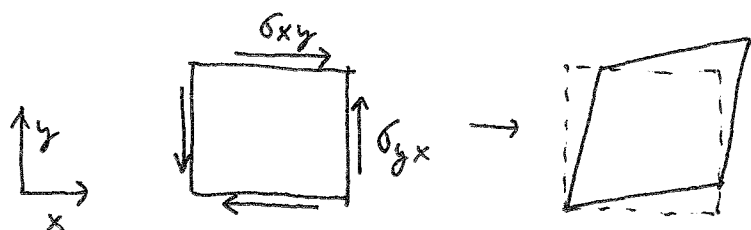
Rádony' odhad elast. konstant:

$$\sim \frac{\text{energia}}{\text{objem}} \sim \frac{1 \text{ eV}}{1 \text{ \AA}^3} \sim 10^2 \text{ GPa}$$

guma: ina' energeticka' škála

$\nu \approx 0.5$  znamená  $\lambda \gg \mu$  (malý Šmykový modul; takmer kelat' material'ny)

- Homogénna škrňová deformácia  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \neq 0$ ; ostatné  $\sigma_{ij} = 0$



$$u_{xy} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy}$$

$\mu$  = modul pružnosti v šmyku

- Polyková rovnica

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \rightarrow \boxed{\rho \ddot{\vec{u}} = (1 + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u}}$$

podĺžny tok  $v_{||} = \sqrt{\frac{1 + 2\mu}{\rho}}$

príčný tok  $v_{\perp} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$