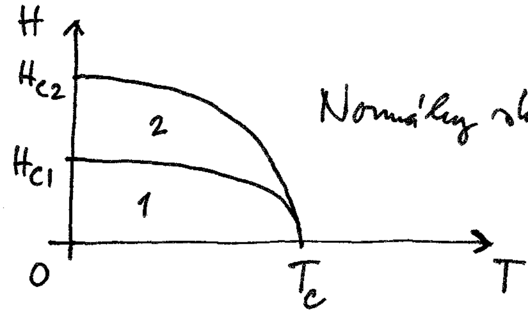
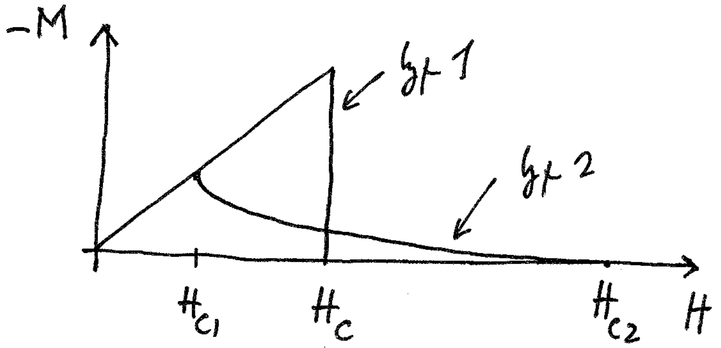
Supravodivosť 3

A) Magnetické vlastnosti supravodičov 2. typu



1: Meissnerova fáza $B=0$

2: Vírový stav (analóg medzi-stavu pre typ 1; existuje aj pre demag. faktor $N=0$)



H_{c1} = dolné kritické pole
H_{c2} = horné kritické pole

Plocha pod krivkou $\boxed{\int_0^{H_{c2}} dH(-M) = \frac{H_c^2}{2}}$ (1)

Dôkaz:

$$g_N(H_{c2}) = f_N(0) - \frac{\mu_0}{2}H_{c2}^2$$

$$g_S(H_{c2}) = f_N(0) - \frac{\mu_0}{2}H_c^2 - \underbrace{\int_0^{H_{c2}} B\,dH}_{\frac{\mu_0}{2}H_{c2}^2 + \mu_0\int_0^{H_{c2}} M\,dH}$$

Z rovnosti $\underbrace{g_N(H_{c2}) = g_S(H_{c2})}_{\text{pri } H_{c2} \text{ sú normálny a supravodivý stav v rovnováhe}}$ plynie rovnica (1)

B) Supravodivý vír = "mikrosolenoid" → polomer ~ λ_L (hĺbka vniku)

magnetické pole spĺňa rovnicu

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2}\vec{B}$$

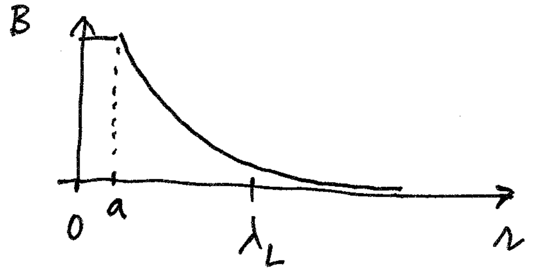
cylindrické súradnice: $\vec{B} = (\overset{r}{0}, \overset{\varphi}{0}, \overset{z}{B})$

$$\boxed{\frac{1}{r}(rB')' = \frac{1}{\lambda_L^2}B.} \quad (2)$$

Kvôli kvantovaniu toku žiadame $\int d^2r\, B = \Phi_0$

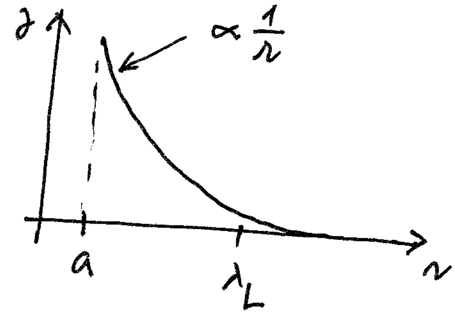
Riešenie (2): $$\boxed{B(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda_L}\right)} \quad (3)$$

$$K_0\left(\frac{r}{\lambda_L}\right) = \text{modifikovaná Besselova funkcia} = \begin{cases} \ln\left(\frac{\lambda_L}{r}\right) + 0.12 \,; & r \ll \lambda_L \\ \sqrt{\frac{\pi\lambda_L}{2r}}\, e^{-r/\lambda_L} \,; & r \gg \lambda_L \end{cases}$$



Existuje normálne jadro s polomerom a, v ktorom netečú supravodivé prúdy. Prúdová hustota $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B} \Rightarrow \vec{j} = (0, j, 0)$

$j = -\frac{1}{\mu_0}B'$



c) <u>Energia víru na jednotku dĺžky víru</u>

ukážeme, že $$\boxed{E = \frac{1}{2\mu_0}\int_{r>a} d^2r \left[\vec{B}^2 + (\mu_0\lambda)^2 \vec{j}^2\right] + \underbrace{\pi a^2 \cdot \frac{\mu_0}{2} H_c^2}} \quad (4)$$

energia magnet. poľa

kinet. energia prúdov

kondenzačná energia potrebná na premenu jadra víru do N stavu

Stačí teda ukázať, že

$$\boxed{E_{kin} = \frac{\mu_0\lambda^2}{2}\int dV\, \vec{j}^2} \quad (5)$$

Postup: vypočítame $E_{kin} = \int dV\, \psi^* H_{kin}\, \psi$

$$H_{kin} = \frac{1}{4m}\left(-i\hbar\vec{\nabla} + 2e\vec{A}\right)^2$$

$\psi = |\psi| e^{i\theta}$ kde $|\psi| = const$ v Londonovej teórii

$$E_{kin} = \frac{|\psi|^2}{4m}\int dV\, e^{-i\theta}(-i\hbar\vec{\nabla} + 2e\vec{A})\cdot(-i\hbar\vec{\nabla} + 2e\vec{A})e^{i\theta}$$

$$= \frac{n}{8m}\int dV\, e^{-i\theta}(-i\hbar\vec{\nabla} + 2e\vec{A})\cdot\Big[e^{i\theta}\underbrace{(\hbar\vec{\nabla}\theta + 2e\vec{A})}_{-2e\mu_0\lambda_L^2\vec{j}}\Big]$$

$$= -\frac{ne\mu_0\lambda_L^2}{4m}\int dV\, e^{-i\theta}(-i\hbar\nabla + 2eA)\cdot\left[e^{i\theta}\vec{j}\right]$$

$$= -\frac{ne\mu_0\lambda_L^2}{4m}\int dV \left[(\hbar\nabla\theta + 2eA)\cdot\vec{j} - i\hbar\vec{\nabla}\cdot\vec{j}\right]$$

$$= +\frac{1}{4e}\int dV\left[+2e\mu_0\lambda_L^2\vec{j}^{\,2} + i\hbar\vec{\nabla}\cdot\vec{j}\right]$$

náboj nespárov. elektrónov

$$E_{kin} = \frac{\mu_0\lambda_L^2}{2}\int dV\,\vec{j}^{\,2} + \frac{i\hbar}{4e}\int dV\,\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \frac{\mu_0\lambda_L^2}{2}\int dV\,\vec{j}^{\,2} + \underbrace{\frac{i\hbar}{4e}\frac{\partial Q}{\partial t}}_{=0\ (\text{stac. procesy})}$$

Teda dokázali sme rovnicu (5).
Rovnicu (4) možno písať $\mathcal{E} = \mathcal{E}_> + \mathcal{E}_<$.
Počítajme $\mathcal{E}_> = \frac{1}{2\mu_0}\int d^2r\left[\vec{B}^2 + \lambda_L^2(\nabla\times B)^2\right]$

identita $\vec{V}\cdot\nabla\times\vec{B} = \nabla\cdot(\vec{B}\times\vec{V}) + \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{V}$

zoberme $\vec{V} = \nabla\times\vec{B} \rightarrow (\nabla\times\vec{B})^2 = \nabla\cdot(B\times(\nabla\times B)) + B\cdot\nabla\times(\nabla\times B)$

$$\mathcal{E}_> = \frac{1}{2\mu_0}\int_{r>a} d^2r\Big[\underbrace{\vec{B}^2 + \lambda_L^2 B\cdot\nabla\times(\nabla\times B)}_{\vec{B} - \lambda_L^2\Delta\vec{B} = 0} + \underbrace{\lambda_L^2\nabla\cdot(B\times(\nabla\times B))}_{\text{Gaussova veta}}\Big]$$

$$\mathcal{E}_> = \frac{\lambda_L^2}{2\mu_0}\oint_{r=a} d\vec{r}\cdot\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})$$

$$\varepsilon_> = -\frac{\pi\lambda_L^2 a}{\mu_0} B(a)\, B'(a) \approx + \frac{\pi\lambda_L^2 a}{\mu_0} \frac{\phi_0^2}{4\pi^2\lambda_L^4} K_0\left(\frac{a}{\lambda_L}\right) \frac{1}{a}$$

$$\boxed{\varepsilon_> = \frac{\phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda_L^2} K_0\left(\frac{a}{\lambda_L}\right)} \qquad \varepsilon_< = \pi a^2 \frac{\mu_0 H_c^2}{2}$$

celková energia $\varepsilon(a) = \varepsilon_>(a) + \varepsilon_<(a)$

$$\frac{d\varepsilon}{da} = 0 \longrightarrow \pi a \mu_0 H_c^2 = \frac{\phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda_L^2 a}$$

$$\boxed{a = \frac{\phi_0}{2\pi\mu_0\lambda_L H_c}} \quad (6)$$

optimálny rozmer jadra víru

očakávame $a \sim \xi_0$ (rozmer Cooperovho páru) $\Rightarrow$ $\boxed{H_c \sim \frac{\phi_0}{\mu_0\lambda_L\xi_0}}$ (6')

Energia víru:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda_L^2}\left[K_0\left(\frac{a}{\lambda_L}\right) + 0.5\right]} \quad (7)$$

D) Odhad dolného kritického poľa H_{c1}

Gibbsova voľná energia víru na jednotku dĺžky vo vonk. poli H:

$$g(H) = f(0) + \varepsilon - \int d^2r\, BH = f(0) + \underbrace{\varepsilon - \phi_0 H}$$

$f(0)$ ↑ voľná energia bez vírov

prírastok voľnej energie; vír stabilný, ak $\varepsilon - \phi_0 H < 0$

$$H_{c1} = \frac{\varepsilon}{\phi_0} \rightarrow \boxed{H_{c1} \approx \frac{\phi_0}{4\pi\mu_0\lambda_L^2}\left[\ln\left(\frac{\lambda_L}{a}\right) + 0.62\right]} \quad (8)$$

E) Odhad horného kritického poľa H_{c2}

dochádza k prekryvu normálnych jadier vírov

$\leftrightarrow$ tok ϕ_0 cez plochu $a^2 \sim \xi_0^2$

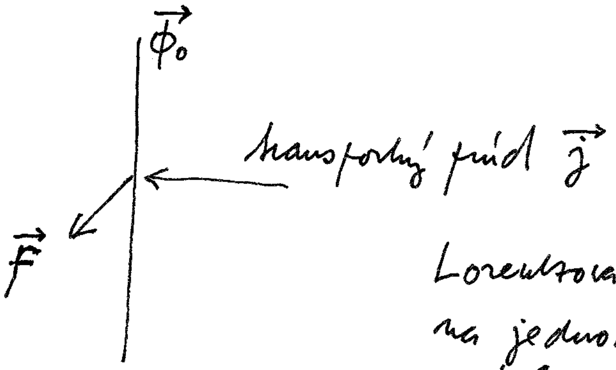
$$\boxed{H_{c2} \sim \frac{\phi_0}{\mu_0\xi_0^2}} \quad (9)$$

f) Záverečné poznámky

Pre supravodiče 2. typu $H_{c1} < H_c < H_{c2}$ (viď rovnice 6', 8, 9)

$\Downarrow$

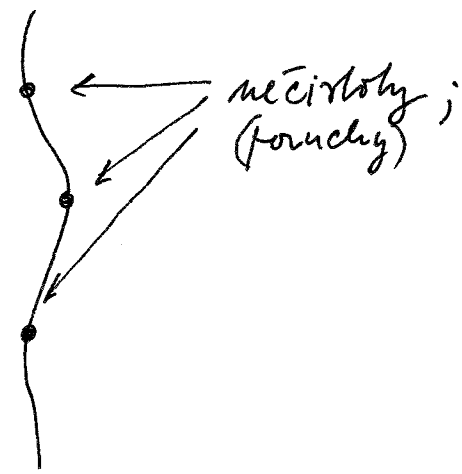
- Supravodivosť vydrží omnoho vyššie polia než H_c
- Vo vírovom stave nie je odpor supravodiča nulový:



Lorentzova sila: $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{\Phi}_0$
na jednotku
dĺžky víru

Pod vplyvom sily sa vír pohne $\Rightarrow$ časovo závislý tok $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Faradayova indukcia $\Rightarrow$ $\vec{E} \neq 0$ $\Rightarrow$ STRATY

- Riešenie: kotvenie vírov



; vír cez ne ochotne prechádza, lebo pri nich je supravodivosť tak či tak potlačená
$\Rightarrow$ netreba platiť kondenzačnú energiu

- Kritická prúdová hustota $\vec{j}_c$: pri nej sila $\vec{f}_c$ sa práve rovná kotviacej sile

$\downarrow$

zložitý problém; hrá rolu interakcia vírov s poruchami ako aj vír-vírové interakcie

Odhad koherenčnej dĺžky zo vzorca (6):

$$\xi_0 \sim \frac{\phi_0}{\mu_0 \lambda_L H_c}$$

Platí: $\mu_0 \lambda_L^2 = \frac{m}{ne^2}$

$\mu_0 H_c^2 \sim \frac{n T_c^2}{\varepsilon_F}$ (viď supravodivosť 1, časť A)

$\rightarrow \boxed{\xi_0 \sim \frac{\hbar v_F}{T_c}}$ Pippard