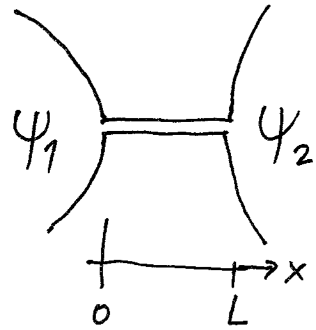
$\boxed{\text{Josephsonov jav}}$

A) Prúd cez slabý spoj

uvažujme supravodivý mostík (veľmi tenký krátky spoj) medzi dvomi masívnymi supravodičmi s vln. funkciami ψ_1 a ψ_2



Schrödingerova rovnica:

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla + 2e\vec{A}\right)^2\psi = 0$$

prúd je malý $\rightarrow$ malé $\vec{B}$ $\rightarrow$ zanedbať $\vec{A}$

$\Downarrow$

SchR $\rightarrow$ $\boxed{\psi'' = 0}$

okraj. podm. $\psi(x=0) = \psi_1$, $\psi(x=L) = \psi_2$

Riešenie: $\psi(x) = \psi_1 + \frac{x}{L}(\psi_2 - \psi_1)$

Prúdová hustota $\quad j = \frac{ie\hbar}{2m}\left(\psi^*\psi' - \psi\,\psi'^*\right)$ (prúd z 1 do 2)

máme $\psi' = \frac{1}{L}(\psi_2 - \psi_1) \Longrightarrow j = \frac{ie\hbar}{2mL}\left(\psi_1^*\psi_2 - \psi_1\psi_2^*\right)$

predpokladajme $\quad \psi_1 = |\psi_1|e^{i\theta_1}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; \psi_2 = |\psi_2|e^{i\theta_2}$

$\downarrow$

$$\boxed{j = j_0 \sin(\theta_1 - \theta_2)}\ (*) \quad \text{kde } j_0 = \frac{e\hbar|\psi_1|\cdot|\psi_2|}{mL}$$

$\downarrow$

možno chápať ako diskretizovanú verziu Londonovej rovnice

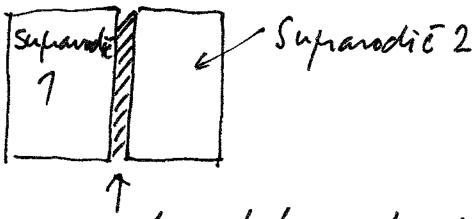
$$\vec{j} = -\frac{\hbar}{2e\mu_0\lambda_L^2}\left(\nabla\theta + \frac{2e}{\hbar}\vec{A}\right)$$

Preto v prítomnosti $\vec{A}$ rovnicu (*) zovšeobecníme takto:

$$\boxed{j = j_0 \sin\left(\theta_1 - \theta_2 - \frac{2e}{\hbar}\int_1^2 \vec{A}\cdot d\vec{r}\right)}\ (1)$$

Josephsonova rovnica pre slabý spoj

Poznámky: • rovnica (1) bola pôvodne odvodená pre tunelový spoj



tenučká vrstvička izolantu (~ 10 Å)

• vo všeobecnom prípade $I = I(\theta)$ kde θ je kalibračne invariantný rozdiel fáz na spoji; $I(\theta)$ nemusí byť $\sin(\theta)$

• $I_{max} = \max\limits_{\theta} (I(\theta))$ = kritický prúd (maximálny prúd, ktorý môže tiecť cez spoj)

B) Časová závislosť supravodivej fázy

Pri $T=0$ možno písať energiu supravodiča $E = N\mu$

N = počet elektrónov

μ = chemický potenciál

→ Energia pripadajúca na 1 Cooperov pár $= 2\mu$

→ časová závislosť vln. funkcie $e^{-2i\mu t/\hbar} = e^{i\theta(t)}$

→ časová závislosť fázy $\boxed{\dot{\theta} = -\frac{2\mu}{\hbar}}$ (2)

Priložme na spoj napätie V: $eV = \mu_2 - \mu_1$

Potom $\dot{\theta} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = \frac{2eV}{\hbar}$ $\boxed{\dot{\theta} = \frac{2eV}{\hbar}}$ (3)

→ $\theta(t) = \theta(0) + \frac{2eV}{\hbar} t$

→ Josephsonov spoj generuje harmonický prúd (viď (1))

$$\boxed{I(t) = I_0 \sin\left[\theta(0) + \frac{2eV}{\hbar} t\right]}$$

Frekvencia žiarenia spoja $\omega = \frac{2eV}{\hbar}$

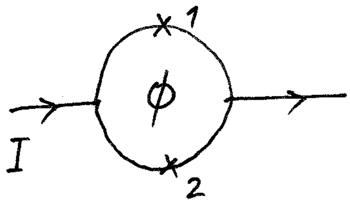
Z presných meraní ω a V možno určiť $\boxed{\frac{2e}{\hbar} = 483{,}59\ldots \frac{\text{MHz}}{\mu\text{V}}}$
(najpresnejšie meranie podielu $e/\hbar$!)

c) Supravodivá kvantová interferencia

SQUID = superconducting quantum interference device

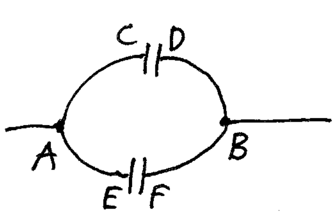
= prístroj na presné meranie malých zmien magnet. polí

Princíp: meria sa kritický prúd cez súčiastku



v závislosti od magnetického toku ϕ

Analýza: $I = I_1 \sin\theta_1 + I_2 \sin\theta_2$ (4)



$$\theta_1 = \theta_C - \theta_D - \frac{2e}{\hbar}\int_C^D \vec{A}\cdot d\vec{r} \quad (5)$$

$$\theta_2 = \theta_E - \theta_F - \frac{2e}{\hbar}\int_E^F \vec{A}\cdot d\vec{r} \quad (6)$$

Predpoklad: spoje 1,2 sú veľmi slabé. Potom vnútri masívnych vodičov AE, FB, AC, DB možno položiť $\vec{\nabla}\theta + \frac{2e}{\hbar}\vec{A} = 0$.

Preto platí:

$$\left.\begin{aligned} \theta_E &= \theta_A - \frac{2e}{\hbar}\int_A^E \vec{A}\cdot d\vec{r} \\ \theta_F &= \theta_B + \frac{2e}{\hbar}\int_F^B \vec{A}\cdot d\vec{r} \end{aligned}\right\} \text{dosadíme do (6)}$$

$$\left.\begin{aligned} \theta_C &= \theta_A + \frac{2e}{\hbar}\int_C^A \vec{A}\cdot d\vec{r} \\ \theta_D &= \theta_B + \frac{2e}{\hbar}\int_D^B \vec{A}\cdot d\vec{r} \end{aligned}\right\} \text{dosadíme do (5)}$$

Dostaneme

$$\left\{\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_A - \theta_B + \frac{2e}{\hbar}\int_{BDCA} \vec{A}\cdot d\vec{r} \\ \theta_2 &= \theta_A - \theta_B - \frac{2e}{\hbar}\int_{AEFB} \vec{A}\cdot d\vec{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 = \frac{2e}{\hbar}\underbrace{\oint \vec{A}\cdot d\vec{r}}_{\phi}$$

$$\boxed{\theta_1 - \theta_2 = 2\pi\frac{\phi}{\phi_0}}$$

Tieto 2 rovnice možno parametrizovať:

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_1 &= \theta + \pi\frac{\phi}{\phi_0} \\ \theta_2 &= \theta - \pi\frac{\phi}{\phi_0} \end{aligned}} \quad (7)$$

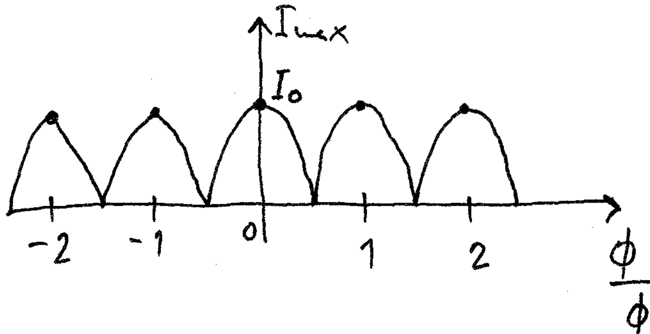
Dosadíme (7) do (1):

$$I = (I_1+I_2)\cos\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\sin\theta + (I_1-I_2)\sin\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\cos\theta$$

uvažujme ďalej pre jednoduchosť $I_1 = I_2 = I_0/2$

$$I = I_0\cos\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\sin\theta$$ $\Longrightarrow$ maximálny prúd cez SQUID sa dosahuje pre $\sin\theta = \pm 1$

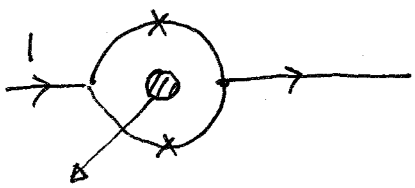
vtedy $$\boxed{I_{max} = I_0\left|\cos\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right|} \qquad (8)$$



zo zmien ~~[illegible]~~ I_{max} možno určiť zmeny toku Φ $\rightarrow$ meranie B

Poznámka:

experiment možno uskutočniť tak, že v mieste supravodiča $\vec{B} = 0$



tenký solenoid umiestnený kolmo na rovinu SQUIDU
vnútri solenoidu $B \neq 0$ (šrafovaná oblasť), mimo $B = 0$
Napriek $B = 0$ v supravodiči je I_{max} modulovaný ako funkcia Φ
$\rightarrow$ v QM je častica citlivá na $\vec{A} \neq 0$
(efekt Aharonova - Bohma)