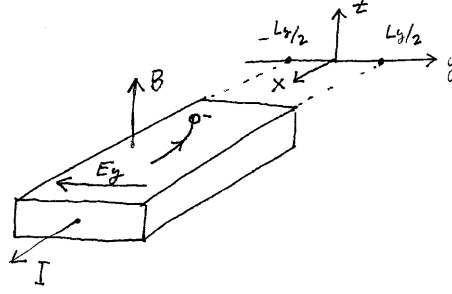


## 18. Kvantový Hallov jav

### Klasický Hallov jav

Skúmame vodivosť materiálov v prítomnosti aplikovaného magnetického poľa  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ . Túto úlohu možno riešiť vo formalizme Boltzmannovej transportnej rovnice, v tejto prednáške však použijeme formálne jednoduchšiu predstavu o transporte. Dá sa ukázať, že v prípade systému s izotropnou Fermiho plochou a efektívnou hmotnosťou  $m^*$  výsledky našej zjednodušenej analýzy reprodukovujú výsledky boltzmannovskej teórie (v priblížení relaxačného času).



Budeme definovať tzv. driftovú rýchlosť elektrónov  $\mathbf{v}$ , pod ktorou budeme rozumieť strednú efektívnu rýchlosť elektrónu (po odčítaní interného pohybu vnútri Fermiho plochy). Inými slovami, driftová rýchlosť bude taká rýchlosť, pomocou ktorej možno prúdovú hustotu vyjadriť v tvare<sup>1</sup>  $\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}$ . Budeme predpokladať, že driftová rýchlosť spĺňa Newtonovu pohybovú rovnicu

$$m^* \left( \dot{\mathbf{v}} + \frac{\mathbf{v}}{\tau} \right) = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

kde  $\tau$  je relaxačný čas, ktorého význam je podobný ako v prípade Boltzmannovej rovnice, ako možno vidieť pri analýze pohybovej rovnice pri nulových aplikovaných poliach, kedy počiatočná rýchlosť  $\mathbf{v}(0)$  relaxuje v čase,  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0)e^{-t/\tau}$ . V stacionárnom stave je riešením pohybovej rovnice

$$\mathbf{v} = -\frac{e\tau}{m^*}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Predpokladajme teraz, že nenulové zložky elektrického poľa existujú len v rovine  $xy$  kolmej na magnetické pole  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ . Potom očakávame  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$  a môžeme písať

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_c\tau \\ -\omega_c\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = -\frac{e\tau}{m^*} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

kde  $\omega_c = eB/m^*$  je tzv. cyklotrónová frekvencia.<sup>2</sup> Ak využijeme vzťah medzi  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{j}$  a definíciu tenzoru merného odporu  $\rho_{ik}$ ,  $E_i = \rho_{ik}j_k$ , dostaneme odtiaľto

$$\rho_{ik} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c\tau \\ -\omega_c\tau & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ik} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c\tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix}$$

kde  $\sigma_0 = ne^2\tau/m^*$  je Drudeho vodivosť a  $\sigma_{ik} = (\rho^{-1})_{ik}$  je tenzor mernej vodivosti.

Uvažujme teraz vzorku tvaru hranola s hranami rovnobežnými s osami  $x, y, z$ . Nech cez vzorku tečie prúd s hustotou  $\mathbf{j} = (j, 0, 0)$ .<sup>3</sup> Potom zo vzťahu  $E_i = \rho_{ik}j_k$  dostaneme

$$E_x = j/\sigma_0, \quad E_y = -\frac{\omega_c\tau}{\sigma_0}j = -\frac{B}{ne}j$$

Nech rozmery hranola sú  $L_x, L_y, L_z$ . Potom v prítomnosti magnetického poľa nenulový prúd indukuje priečne (tzv. Hallovo) napätie  $V_H$ . Pre tzv. Hallov odpor platí

$$R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{-E_y L_y}{j L_y L_z} = \frac{B}{n L_z e} = \frac{B}{n \square e} \quad (1)$$

<sup>1</sup>Pripomíname, že náboj elektrónu je  $-e$ , t.j.  $e > 0$ .

<sup>2</sup> $\omega_c$  je frekvenciou klasického kruhového pohybu nabitých častíc v magnetickom poli.

<sup>3</sup>V smeroch  $y, z$  vzorka nie je vodivo spojená s okolím a preto v týchto smeroch prúd netečie.

kde  $n_{\square}$  je koncentrácia elektrónov na jednotku plochy v rovine  $xy$ . Ako vidno, klasický Hallov jav možno použiť na meranie koncentrácie nosičov náboja  $n$ . Navyiac, v klasickej oblasti je odpor  $R_H$  priamo úmerný aplikovanému poľu  $B$ . Všimnime si tiež závislosť  $R_H$  len od prvej mocniny  $e$ , ktorá umožňuje zmerať znamienko nosičov náboja.

### Dvojrozmerný elektrónový plyn

Nech hranol z predchádzajúceho výkladu má tvar tenkej vrstvy, t.j. nech  $L_x$  a  $L_y$  nadobúdajú makroskopické hodnoty, kým  $L_z$  nech je veľmi malé. V takom prípade energetické spektrum elektrónov možno písať v tvare

$$\varepsilon_{\lambda}(k_x, k_y) = \frac{\hbar^2(k_x^2 + k_y^2)}{2m^*} + E_{\lambda}$$

t.j. kinetická energia v smeroch  $x, y$  je kvázispojité, kým energia pohybu v smere kolmom na film  $E_{\lambda}$  je diskkrétne premenlivá. Ak rozdiel najnižších energií  $E_1 - E_0$  je dostatočne veľký, t.j. ak  $\hbar^2 k_F^2 / (2m^*) + E_0 < E_1$  kde  $k_F$  je polomer (dvojrozsmernej) Fermiho kružnice, potom je energeticky výhodné, aby pri nulovej teplote boli obsadené iba stavy s  $\lambda = 0$ . Takýto stav nazývame dvojrozmerným (2D) elektrónovým plynom. 2D elektrónový plyn možno realizovať napríklad vo vodivostnom kanáli FET tranzistora.

### Kvantový Hallov jav

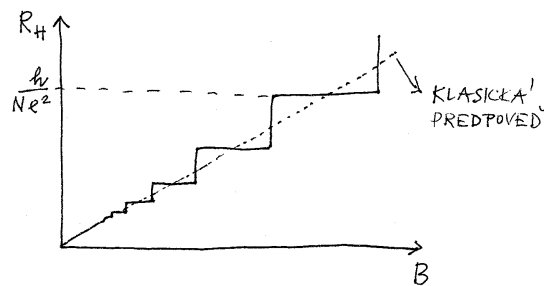
Hallov odpor 2D elektrónového plynu v malých magnetických poliach spĺňa klasickú predpoveď (1). V silných magnetických poliach a pri nízkych teplotách však vznikajú odchýlky od klasickej predpovede a krivka  $R_H = R_H(B)$  pozostáva zo sady schodíkov pri hodnotách

$$R_H = \frac{1}{N} \frac{h}{e^2}$$

kde  $N$  je celé číslo. Tento jav nazývame kvantovým Hallovým javom. Na kvantovom Hallovom jave sú fascinujúce minimálne dve veci:

1. Na rozdiel od klasickej predpovede (1), v silných poliach  $R_H$  nezávisí od materiálových parametrov (hustota elektrónov), ale je úplne daný iba fundamentálnymi konštantami.
2. Meranie Hallovho odporu umožňuje presne zmerať tzv. von Klitzingovu konštantu:

$$\frac{h}{e^2} = 25.812807557(18) \text{ k}\Omega$$



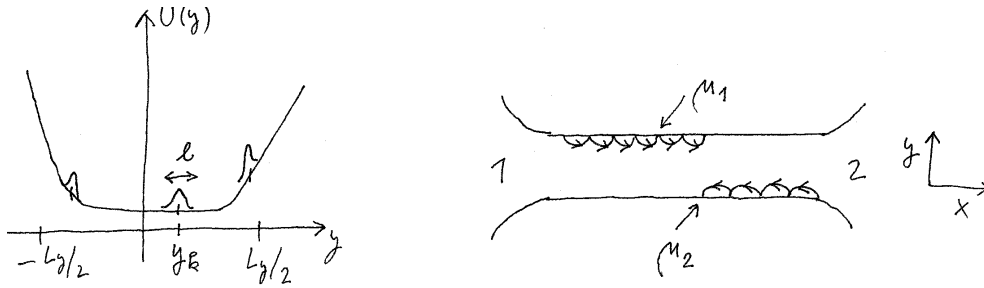
### Hranové stavy

Kvantový Hallov jav sa pozoruje vo vzorkách, pre ktoré platí  $\omega_c \tau > 1$ , t.j. počas doby života by elektrón vykonal jednu klasickú otočku. Preto v tomto režime nemožno vplyv magnetického poľa popísať ako malú korekciu k rovinným vlnám, ale je potrebné riešiť Schrödingerovu rovnicu pre elektrón v magnetickom poli:

$$\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2\psi(x, y) + U(y)\psi(x, y) = \varepsilon\psi(x, y)$$

Spinový stupeň voľnosti elektrónu v našom výklade neuvažujeme, pretože pre pochopenie kvantovania Hallovho javu nie je podstatný. Ďalší postup vyžaduje voľbu vektorového potenciálu reprodukovujúceho magnetické pole,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = (0, 0, B)$ . Volíme tzv. Landauovu kalibráciu  $\mathbf{A} = (-yB, 0, 0)$ .

Budeme študovať spektrum 2D elektrónov v obdĺžniku s rozmermi  $L_x \gg L_y$ , t.j. vzorka je dlhá v smere tečenia prúdu a krátka, avšak stále makroskopická, v smere naň kolmom. Potenciál  $U(y)$  popisuje



vplyv konečnosti vzorky v smere  $y$ : vnútri vzorky je zhruba konštantný a pri krajocho vzorky (t.j. pre  $\pm L_y/2$ ) prudko rastie. Teda SchR nadobudne tvar

$$\frac{1}{2m} \left[ (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - eyB)^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \psi(x, y) + U(y)\psi(x, y) = \varepsilon \psi(x, y)$$

Všimnime si, že hamiltonián nezávisí od súradnice  $x$ , preto riešenie možno hľadať v tvare  $\psi(x, y) = e^{ikx}\phi(y)$ . Po dosadení do SchR a úprave dostaneme rovnicu pre  $\phi(y)$ :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 (y - y_k)^2 \right] \phi(y) + U(y)\phi(y) = \varepsilon \phi(y), \quad y_k = \frac{\hbar k}{eB}$$

Člen v hranatej zátvorke je hamiltonián harmonického oscilátora v smere  $y$  so stredom v bode  $y_k$ . Zanedbajme na chvíľu prítomnosť člena  $U(y)$  v SchR. Vlnové funkcie zodpovedajúce stavom  $\phi_n$  s nízkymi energiami potom budú lokalizované okolo  $y_k$  na vzdialenosti tzv. magnetickej dĺžky<sup>4</sup>  $l = \sqrt{\hbar/(eB)}$ . Pre silné magnetické polia je táto dĺžka malá, napr. pre  $B = 10$  T je  $l \approx 8$  nm. Budeme predpokladať, že funkcia  $U(y)$  sa na vzdialenosti  $l$  takmer nemení. Preto vlastné funkcie a im príslušné vlastné energie nášho problému sú

$$\psi_{nk}(x, y) \propto e^{ikx} \phi_n(y - y_k), \quad \varepsilon_{nk} = \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + U(y_k)$$

Riešenia sú teda delokalizované pozdĺž drôtu a lokalizované v smere  $y$ . Vlastné stavy s indexom  $n$  vytvárajú tzv.  $n$ -tú Landauovu hladinu.

V ideálnej vzorke bez okrajov je  $U(y) = 0$  a energia všetkých stavov  $n$ -tej Landauovej hladiny je rovnaká. Teraz vypočítame degeneráciu Landauovej hladiny, t.j. počet stavov s energiou  $\hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})$ . V smere osi  $x$  predpokladáme periodické okrajové podmienky, preto vlnový vektor  $k$  nadobúda hodnoty, ktoré sú celočíselným násobkom  $2\pi/L_x$ . Všimnime si, že zmena  $k$  posúva ťažisko  $y_k = \hbar k/(eB)$  vlnovej funkcie  $\phi_n(y - y_k)$ . Teda  $y_k$  sú celočíselnými násobkami  $\delta y = \hbar/(eBL_x) = \Phi_0/(BL_x)$ , kde  $\Phi_0 = h/e$  je tzv. kvantum magnetického toku. Ale ťažisko  $y_k$  musí ležať vnútri vzorky, teda medzi  $-L_y/2$  a  $L_y/2$ . Preto dovolených je  $L_y/\delta y$  polôh ťažiska, čiže degenerácia Landauovej hladiny je  $L_y/\delta y = \Phi/\Phi_0$ , kde  $\Phi = BL_x L_y$  je celkový magnetický tok cez vzorku.

Nakoniec počítajme grupovú rýchlosť pozdĺž drôtu v stave  $\psi_{nk}$ :

$$v_{nk} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_{nk}}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial k} = \frac{1}{eB} \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y_k}$$

Teda vnútri vzorky, kde  $U(y) \approx \text{const}$ , je grupová rýchlosť nulová, kým pre  $y_k \approx -L_y/2$  je  $v_k < 0$  a pre  $y_k \approx L_y/2$  je  $v_k > 0$ . Stavy v blízkosti hrán sú teda nositeľmi prúdu. Pozdĺž protiahlých hrán tečú protibežné prúdy, v súlade s klasickou predstavou elektrónov búšiacich do stien nádoby.

## Vplyv nečistôt

Skúmame vplyv nečistôt na spektrum Hallovej vzorky. Vplyv nečistôt popíšeme dodatočnou potenciálnou energiou  $V(x, y)$  v SchR pre elektrón. V limite  $\omega_c \tau > 1$ , kedy sa kvantový Hallov jav pozoruje, sa pri analýze vplyvu nečistôt môžeme obmedziť na analýzu jednej Landauovej hladiny.

<sup>4</sup>Magnetickú dĺžku definujeme ako dĺžku typických kmitov harmonického oscilátora a odhadujeme ju z rovnosti kinetickej a potenciálnej energie  $\hbar^2/(ml^2) = m\omega_c^2 l^2$ .

Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že potenciál  $V(x, y)$  je pomaly sa meniacou funkciou na škále magnetickej dĺžky  $l$ . Elektrón z Landauovej hladiny  $n$  s energiou  $\varepsilon$  sa bude pohybovať po ekvipotenciálnych čiarach celkového potenciálu  $V(x, y) + U(y) = \varepsilon - \hbar\omega_c(n + 1/2)$ , keďže (podobne ako pri hranových stavoch) môžeme použiť klasickú predstavu o búsiacej trajektórii elektrónu. Celkový potenciál  $V(x, y) + U(y)$  si možno predstaviť ako žľab s hrboľatým dnom. V žľabovej analógii potom vlnové funkcie budú lokalizované okolo brehov jazierok alebo ostrovčekov, ktoré vzniknú po naliatí malého množstva vody do žľabu do presne stanovenej výšky. Ak teraz  $\varepsilon < \hbar\omega_c(n + 1/2)$ , potom vlnové funkcie budú lokalizované okolo lokálnych miním potenciálu  $V(x, y)$ , čiže budú lokalizované. Ak naopak  $\varepsilon > \hbar\omega_c(n + 1/2)$ , potom vlnové funkcie budú dvoch typov: jednak budú existovať lokalizované stavy krúžiace okolo lokálnych maxím  $V(x, y)$ , jednak budú existovať (pre dané  $n$ ) dva hranové stavy, pri každej stene žľabu jeden. Tieto stavy už nebudú priamkové, ako v čistom systéme, ale napriek tomu budú delokalizované, t.j. budú bežať pozdĺž celého žľabu. Znižovaním energie stavov s  $\varepsilon > \hbar\omega_c(n + 1/2)$  bude polomer lokalizácie<sup>5</sup> rásť (vrstevnice tesne pod vrcholmi sú kratšie ako nižšie položené vrstevnice). Podobne pri zvyšovaní energie stavov s  $\varepsilon < \hbar\omega_c(n + 1/2)$  bude polomer lokalizácie rásť. Pri špeciálnej energii  $\varepsilon_c(n) \approx \hbar\omega_c(n + 1/2)$  sa topológia trajektórií bude meniť: vrcholové trajektórie sa zmenia na dolinové. Zmena sa udeje cez delokalizovaný stav. Ukázali sme teda, že pokiaľ chemický potenciál  $\mu$  neleží v blízkosti niektorej z energií  $\varepsilon_c(n)$ , potom k vodivosti prispievajú iba hranové stavy.

### Kvantovanie vodivosti

Počítajme teraz príspevok k vodivosti od hranových stavov príslušných k jednej Landauovej hladine. Budeme predpokladať, že počet elektrónov vstupujúcich z elektródy 1 (pri  $x = 0$ ) do hranového stavu v blízkosti hrany  $y = L_y/2$  je daný Fermiho-Diracovou distribučnou funkciou  $f(\varepsilon_k - \mu_1)$ , kde  $\mu_1$  je chemický potenciál v elektróde 1. Ďalej budeme predpokladať, že každý elektrón, ktorý vošiel z elektródy 1 do hranového stavu, prejde s určitou celým hranovým stavom až do elektródy 2 (pri  $x = L_x$ ). Naviac budeme predpokladať, že sa pritom elektrón nezúčastní žiadnej neelastickej zrážky, t.j. že jeho energia zostane konštantnou pozdĺž celej vzorky. Vzorku dĺžky  $L_x$  prebehne elektrón v hranovom stave  $k$  za čas  $L_x/v_k$ , preto celkový tok elektrónov nesený stavmi v blízkosti hrany  $y = L_y/2$  je

$$J_{1 \rightarrow 2} = \sum_k \frac{1}{L_x/v_k} f(\varepsilon_k - \mu_1) = \frac{1}{L_x} \sum_k \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} f(\varepsilon_k - \mu_1) = \frac{1}{\hbar} \int \frac{dk}{2\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} f(\varepsilon_k - \mu_1) = \frac{1}{h} \int_{\varepsilon_c(n)} d\varepsilon f(\varepsilon - \mu_1)$$

kde sme uvažili, že minimálna energia hranového stavu je  $\varepsilon_c(n)$ . Ak ďalej uvažíme, že tok elektrónov z 2 do 1 nesený hranovými stavmi v blízkosti  $y = -L_y/2$  je  $J_{2 \rightarrow 1} = h^{-1} \int_{\varepsilon_c(n)} d\varepsilon f(\varepsilon - \mu_2)$ , potom celkový elektrický prúd (od jednej Landauovej hladiny) tečúci vo vzorke z 1 do 2 bude

$$I = -e(J_{1 \rightarrow 2} - J_{2 \rightarrow 1}) = -\frac{e}{h} \int_{\varepsilon_c(n)} d\varepsilon [f(\varepsilon - \mu_1) - f(\varepsilon - \mu_2)] = -\frac{e}{h}(\mu_1 - \mu_2) = \frac{e^2}{h}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{e^2}{h}V$$

kde  $V$  je rozdiel potenciálov medzi 1 a 2.<sup>6</sup> Pre  $N$  zaplnených hranových stavov potom dostávame  $I/V = N(e^2/h)$ . Všimnime si ďalej, že Hallovo napätie  $V_H = V$ , keďže podľa predpokladu o absencii neelastických rozptylov je chemický potenciál pozdĺž hrany  $y = L_y/2$  totožný s chemickým potenciálom v elektróde 1 a teda rovný  $\mu_1 = -e\varphi_1$ . Podobne pozdĺž hrany  $y = -L_y/2$  je chemický potenciál rovný  $\mu_2 = -e\varphi_2$ . Tak dostávame  $R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{1}{N} \frac{h}{e^2}$  v súlade s experimentom.

Treba podotknúť, že naša analýza platí, len ak chemický potenciál  $\mu$  je dostatočne vzdialený od  $\varepsilon_c(n)$ . V opačnom prípade sa elektrón v jednom hranovom stave môže rozptýliť do protiběžného hranového stavu prostredníctvom stavov pri energii blízkej k  $\varepsilon_c(n)$ , ktorých polomer lokalizácie je aspoň  $L_y$ .

Vráťme sa na chvíľu k analýze systému bez nečistôt. Vtedy  $\varepsilon_c(n)$  je presne rovné energii Landauovej hladiny  $\hbar\omega_c(n + 1/2)$ , pretože z nekonečne veľa degenerovaných vlnových funkcií  $\psi_{nk}$  možno vytvoriť lineárnu superpozíciu, ktorá je delokalizovaná v smere  $y$ . Teda Hallova vodivosť môže nadobúdať kvantovanú hodnotu, iba keď sa chemický potenciál nachádza medzi Landauovými hladinami. V čistom systéme je to však možné iba pre nekonečne úzky interval magnetických polí, pretože počet hranových stavov oproti počtu všetkých stavov v danej Landauovej hladine je zanedbateľne malý. Inými slovami, takmer pre všetky hodnoty  $B$  leží  $\mu$  v jednej z Landauových hladín. Dostali sme paradoxný výsledok: kvantový Hallov jav je možný iba v nedokonalých vzorkách!

<sup>5</sup>T.j. rozmer lokalizovaných vlnových funkcií.

<sup>6</sup>Tento výsledok platí aje ak teploty v elektródach 1 a 2 sú rôzne.