

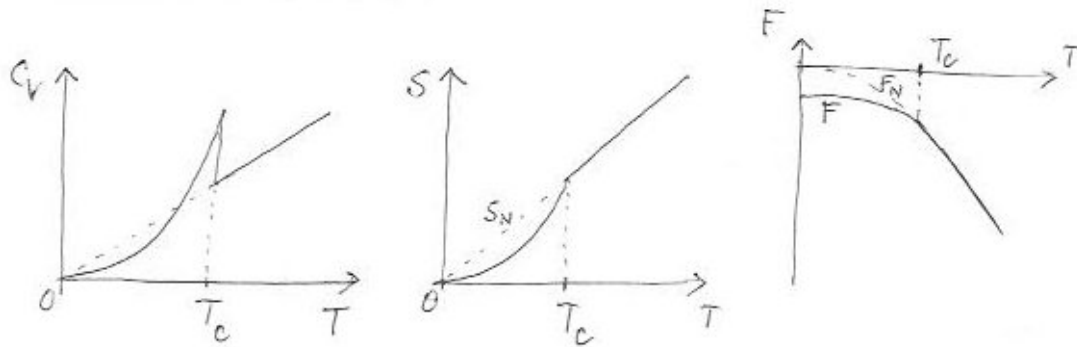
24. Supravodivosť

Supravodivosť ako nová termodynamická fáza

Vo väčšine kovov existuje pri nízkych teplotách nová termodynamická fáza. Teplota prechodu medzi normálnym kovom a nízkoteplotnou fázou sa nazýva kritická teplota T_c . Jej typické hodnoty sú:

	Nb	Nb ₃ Ge	MgB ₂	HgBa ₂ Ca ₂ CuO ₃
T_c (K)	9.3	23	39	133

Rekordná teplota prechodu sa realizuje v tzv. vysokoteplotných supravodičoch, ktorých vlastnosti sa v mnohom odlišujú od nízkoteplotných supravodičov. Náš výklad bude zameraný na nízkoteplotné supravodiče, ktorých správanie je v hrubých rysoch pochopené.



V nulovom aplikovanom magnetickom poli je fázový prechod do supravodivého stavu druhého druhu, t.j. nie je spojený s existenciou skupenského tepla premeny. To znamená, že pri T_c je entropia supravodivej fázy S a entropia normálnej fázy S_N rovnaká. V bode prechodu sa však líši merné teplo pri konštantnom objeme c_V oboch fáz. V normálnom kove je merné teplo lineárnou funkciou teploty. V supravodiči je merné teplo pri $T \ll T_c$ omnoho menšie. Integrovaním experimentálnych dát možno určiť entropiu supravodivej fázy: $S(T) = \int_0^T dT' \frac{c_V(T')}{T'}$. Porovnaním s entropiou S_N extrapolovanou z normálnej fázy vidno, že $S < S_N$, t.j. nová fáza je usporiadanejšia. Keďže pri T_c sú voľné energie oboch fáz rovnaké, ďalšou integráciou možno určiť rozdiel voľných energií oboch fáz: $F(T) - F_N(T) = \int_T^{T_c} dT' [S(T') - S_N(T')]$. Voľná energia v supravodivej fáze je nižšia než v normálnej fáze a rozdiel pri nízkych teplotách je rádu T_c^2/ε_F . Tento výsledok interpretujeme tak, že v novej fáze nastala reorganizácia elektrónového spektra v blízkosti Fermiho plochy. Zlomok T_c/ε_F zo všetkých elektrónov znížil svoju energiu o T_c .

Excitačné spektrum

V neinteragujúcom kove možno vytvoriť excitáciu s ľubovoľne nízkou excitačnou energiou vytvorením časticovo-dierového páru, v ktorom sa diera nachádza tesne pod Fermiho plochou a častica tesne nad ňou. V reálnom kove s interakciami tento výsledok ostáva v platnosti, ako vidno napríklad z nenulovej hodnoty $\sigma(\omega)$ v limite nízkych frekvencií. V supravodivom stave možno napríklad optickými metódami ukázať, že v excitačnom spektre existuje zakázaný pás šírky $2\Delta \approx 3.5T_c$. Tento výsledok interpretujeme ako dôsledok vzniku viazaných stavov elektrónov, ktoré vytvárajú dvojelektrónové “molekuly” (tzv. Cooperove páry) s väzbovou energiou 2Δ .¹ Spinová magnetická susceptibilita pod T_c klesá a pri nulovej teplote vymizne. Tento výsledok vysvetľujeme tým, že celkový spin Cooperových párov je $S = 0$, čiže takéto molekuly sú nemagnetické, na rozdiel od voľných elektrónov, ktoré nesú spin $S = 1/2$, a teda aj magnetický moment.

Nekonečná vodivosť

V obyčajných kovoch je spád napätia V na drôte priamo úmerný prúdu I tečúcemu cez drôt, $V = RI$, kde R je konečný odpor drôtu. So znižovaním teploty odpor klesá a pri T_c sa mení skokom z konečnej hodnoty na nemerateľne malú hodnotu.

¹Jednou z kľúčových otázok teórie supravodivosti je otázka o pôvode síl, ktoré viažu elektróny do Cooperových párov. Tejto otázke sa tu nebudeme venovať a budeme jednoducho predpokladať, že Cooperove páry existujú.

Najpresnejšie možno R určiť pomocou merania tzv. perzistentných prúdov. Uvažujme masívny supravodivý prstenec, cez ktorý preteká magnetický tok Φ_e budený vonkajšími cievkami. V čase $t = 0$ vypneme Φ_e . Podľa Faradaya sa vo vzorke indukuje napätie $U(t) = -d\Phi/dt = \Phi_e\delta(t)$. Ak odpor prstenca označíme R a jeho indukčnosť L , potom prúdy v prstenci budú spĺňať rovnicu

$$U(t) = RI + L \frac{dI}{dt} \quad \rightarrow \quad I(t) = I_0 e^{-t/\tau}; \quad \tau = L/R; \quad I_0 = \Phi_e/L$$

Teda z merania časovej závislosti prúdu možno určiť odpor supravodiča. Ako však možno merať prúd v uzavretej slučke? Rovnicu pre prúd možno písať v tvare

$$\frac{d}{dt}(\Phi_e + LI) = -RI$$

Teda ak $R = 0$, potom celkový magnetický tok cez prstenec $\Phi = \Phi_e + LI$ musí byť konštantný. Experimenty ukazujú, že v masívnych prstencoch je pokles toku Φ nemerateľne malý.

Sformulujme teraz Drudeho teóriu pre ideálny vodič. V aplikovanom elektrickom poli $\mathbf{E}$ driftová rýchlosť rastie: $m d\mathbf{v}/dt = -e\mathbf{E}$, preto² $\partial \mathbf{j}/\partial t = \frac{ne^2}{m}\mathbf{E}$. Aplikovaním operácie $\nabla \times$ na obe strany rovnice dostávame s využitím Maxwellových rovníc³ $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ a $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ rovnicu pre $\mathbf{B}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\lambda_L^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B}] = 0; \quad \frac{1}{\lambda_L^2} = \frac{\mu_0 ne^2}{m} \quad (1)$$

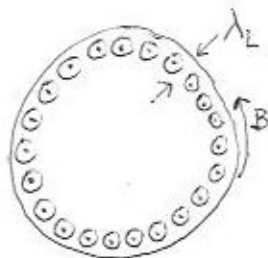
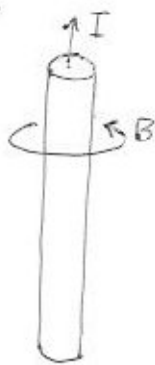
kde λ_L je tzv. Londonova hĺbka vniku. Jej typické hodnoty sú 16 nm pre Al, 35 nm pre Sn a 150 nm pre vysokoteplotné supravodiče.

Meissnerov jav

Meissner zistil, že supravodič sa v slabých externých magnetických poliach správa ako ideálny diamagnet, t.j. vnútri masívneho supravodiča $\mathbf{B} = 0$. Takéto správanie nevyplýva z rovnice (1) pre magnetické pole v ideálnom vodiči. Pri schladení normálneho kovu vo vonkajšom poli pod teplotu T_c totiž podľa tejto rovnice môže ostať magnetické pole nezmenené, experiment však hovorí, že magnetické pole je vytlačené zo vzorky. Magnetické správanie supravodičov však možno popísať rovnicou

$$\lambda_L^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} \quad (2)$$

Z druhej formy rovnice totiž vidno, že napríklad do polonekonečného supravodiča v polpriestore $x > 0$ vniká magnetické pole B_0 rovnobežné s povrchom supravodiča podľa vzťahu $B(x) = B_0 e^{-x/\lambda_L}$, teda λ_L má význam hĺbky vniku magnetického poľa do supravodiča. Všimnime si, že tieniace prúdy tečú iba v blízkosti povrchu vzorky.



TRANSPORTNÝ PRÚD
TEČIE PO POVRCHU
SUPRAVODIČA

Bezdisipatívny transport prúdu možno chápať ako dôsledok Meissnerovho javu. Obvykle nazeráme na drôt, ktorým preteká prúd I , ako na zdroj magnetického poľa. Ak sa však na ten istý drôt pozrieme ako

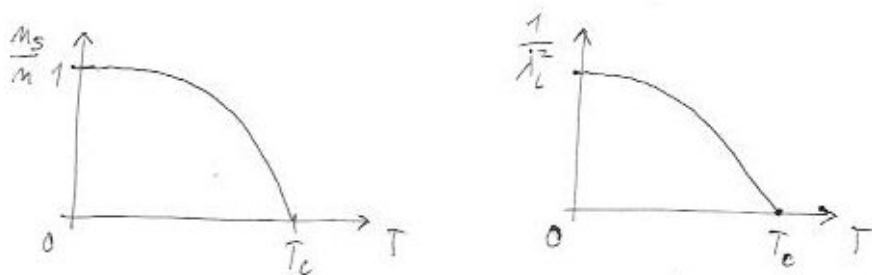
²Pre malé rýchlosti $\mathbf{v}$ nemusíme rozlišovať medzi d/dt a $\partial/\partial t$.

³Zanedbávame posuvný prúd.

na vložení do magnetického pole, potom transportný prúd I bude tiecť kvôli Meissnerovmu javu: vďaka tomu, že vo vrstve hrúbky λ_L tečie prúd pozdĺž drôtu, je vnútro drôtu odtienené od magnetického poľa.

Dvojkvapalinový model

V supravodivom stave vznikajú Cooperove páry, ktoré nesú celočíselný spin. Takéto častice nazývame bozóny a na rozdiel od častíc s poločíselným spinom (tzv. fermiónov) pre ne neplatí Pauliho vylučovací princíp. Elektromagnetické vlastnosti supravodičov možno vysvetliť predpokladom, že v supravodivom stave obsadí makroskopické množstvo Cooperových párov ten istý kvantovomechanický stav (tzv. kondenzát). Predpokladáme, že pri nulovej teplote sú všetky elektróny viazané v pároch. Očakávame, že pri nenulovej teplote bude časť párov rozbitá a že elektróny z rozbitých párov vytvárajú tzv. normálnu zložku. Pritom súčet koncentrácie normálnej kvapaliny n_N a koncentrácie elektrónov v kondenzáte n_S je samozrejme konštantný a rovný koncentrácii všetkých elektrónov n . S rastúcou teplotou pritom koncentrácia elektrónov v kondenzáte klesá a pri kritickej teplote bude ich koncentrácia nulová. Supravodivosť teda možno definovať ako fázu s nenulovou koncentraciou elektrónov v kondenzáte.



Makroskopická vlnová funkcia

Budeme predpokladať, že kondenzát je popísaný (tzv. makroskopickou) vlnovou funkciou $\psi(\mathbf{r})$,⁴ ktorá je normovaná tak, že $|\psi(\mathbf{r})|^2$ je koncentrácia Cooperových párov. Vlnová funkcia $\psi(\mathbf{r})$ hrá úlohu parametra usporiadania, podobne ako napr. vektor magnetizácie $\mathbf{M}$ je parametrom usporiadania v prípade feromagnetu. Keďže každý Cooperov pár v kondenzáte obsadzuje ten istý kvantovomechanický stav úmerný $\psi(\mathbf{r})$, očakávame, že $\psi(\mathbf{r})$ spĺňa obyčajnú Schrödingerovu rovnicu pre jednu časticu

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m^*}(-i\hbar \nabla + 2e\mathbf{A})^2 \psi + U\psi; \quad -i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{1}{2m^*}(i\hbar \nabla + 2e\mathbf{A})^2 \psi^* + U\psi^*$$

kde $m^* = 2m$ je hmotnosť Cooperovho páru, $-2e$ je jeho náboj a U je potenciálna energia, ktorej tvar nepotrebujeme špecifikovať. Druhá rovnica je komplexne združenou rovnicou k SchR. Vynásobíme teraz SchR vlnovou funkciou ψ^* a komplexne združenú rovnicu vynásobíme ψ . Rovnice odčítajme a po úprave dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 + \nabla \cdot \left[-\frac{i\hbar}{4m}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + \frac{e\mathbf{A}}{m}|\psi|^2 \right] = 0$$

Keďže nábojová hustota $\rho = -2e|\psi|^2$, túto rovnicu možno chápať ako rovnicu kontinuity pre náboj $\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ s prúdovou hustotou

$$\mathbf{j} = \frac{ie\hbar}{2m}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{2e^2 \mathbf{A}}{m}|\psi|^2; \quad \mathbf{j} = -\frac{2e^2}{m}|\psi|^2 \left(\mathbf{A} + \frac{\hbar}{2e} \nabla \theta \right)$$

kde v druhej rovnici sme vlnovú funkciu parametrizovali v tvare $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\theta(\mathbf{r})}$.

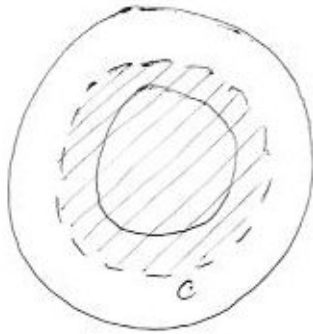
V slabých poliach môžeme v prvom priblížení zanedbať závislosť $|\psi|^2$ od magnetického poľa a koncentraciu Cooperových párov môžeme brať ako priestorovo konštantnú a závisiacu len od teploty. Za tohto predpokladu dostaneme tzv. Londonovu rovnicu

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \left(\mathbf{A} + \frac{\hbar}{2e} \nabla \theta \right); \quad \frac{1}{\lambda_L^2} = \frac{2\mu_0 e^2}{m} |\psi|^2$$

⁴Vlnová funkcia $\psi(\mathbf{r})$ popisuje pohyb ťažiska Cooperovho páru.

Takto definované λ_L je zovšeobecnením už zavedenej definície na prípad konečných teplôt. Pretože pri nulovej teplote, kedy všetky elektróny tvoria kondenzát, je $|\psi|^2 = n/2$, v tejto limite nová definícia doslovne reprodukuje už zavedenú definíciu. S rastúcou teplotou $|\psi|^2$ klesá, čiže hĺbka vniku rastie a diverguje pri T_c .

Rotácia Londonovej rovnice má tvar $\lambda_L^2 \nabla \times \mu_0 \mathbf{j} = -\mathbf{B}$ a s uvážením Maxwellovej rovnice v statickom prípade $\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$ ju preto možno písať v tvare rovnice (2). Teda Londonova rovnica vysvetľuje Meissnerov jav.



KVANTOVANIE TOKU.

TOK CEZ ŠRAFOVANÚ PLOCHU

$$\Phi = k \cdot \Phi_0$$

Kvantovanie magnetického toku

Skúmame masívny supravodivý prstenec a v ňom dráhu C , ktorá obopína dieru v prstenci a leží dostatočne ďaleko od povrchu prstenca, takže pozdĺž C možno meissnerovské tieniace prúdy zanedbať a $\mathbf{j} = 0$. Preto

$$0 = - \oint_C \mu_0 \lambda_L^2 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \frac{\hbar}{2e} \oint_C \nabla \theta \cdot d\mathbf{r} = \Phi - \frac{\hbar}{2e} 2\pi k \quad \rightarrow \quad \Phi = k \Phi_0$$

kde Φ je magnetický tok prechádzajúci cez (akúkoľvek) plochu s okrajom v čiare C , k je celé číslo a $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ je kvantum magnetického toku. Pri odvodení sme použili predpoklad, že vlnová funkcia supravodiča je jednoznačná. Preto pri obehnutí čiary C sa vlnová funkcia môže zmeniť iba o násobok 2π .

Ukázali sme teda, že magnetický tok uväznený v masívnom supravodivom prstenci musí byť násobkom Φ_0 . Tento výsledok nám pomôže vysvetliť stabilitu perzistentných prúdov. Stavy s rôznymi hodnotami k totiž nesú rôzne perzistentné prúdy. Stavy s nenulovými prúdmi sú síce metastabilné, ale zníženie prúdu vyžaduje zmenu celej makroskopickej vlnovej funkcie. To je ale obvykle spojené s nutnosťou prekonať obrovskú bariéru.