

26. Josephsonov jav

Vlnová funkcia izolovaného supravodiča

Skúmame supravodič s chemickým potenciálom pre elektróny μ . Pri vložení Cooperovho páru sa energia supravodiča zväčší o 2μ . Preto hamiltonián pre makroskopickú vlnovú funkciu musí okrem kinetickej energie obsahovať aj potenciálnu energiu 2μ a Schrödingerovu rovnicu pre supravodič možno písať v tvare

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{4m} (-i\hbar \nabla + 2e\mathbf{A})^2 \psi + 2\mu \psi \quad (1)$$

Pre izolovaný supravodič je potrebné túto rovnicu riešiť s okrajovou podmienkou žiadajúcou, aby normálová zložka supravodivého prúdu na povrchu vzorky bola nulová. Ak supravodivý prúd napíšeme v tvare

$$\mathbf{j} = -\frac{e}{2m} [\psi^* (-i\hbar \nabla + 2e\mathbf{A}) \psi + \psi (i\hbar \nabla + 2e\mathbf{A}) \psi^*] = -\frac{e}{m} \text{Re} [\psi^* (-i\hbar \nabla + 2e\mathbf{A}) \psi]$$

potom okrajovú podmienku $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = 0$, kde $\mathbf{n}$ je vektor normály k povrchu, možno písať v tvare

$$\mathbf{n} \cdot (-i\hbar \nabla + 2e\mathbf{A}) \psi = \frac{i\hbar}{b} \psi$$

kde b je reálna konštanta s rozmerom dĺžka. Hodnota b závisí od typu rozhrania a možno ju určiť pomocou mikroskopickej teórie. Pre rozhranie supravodič-izolant (napr. vákuum) možno zvoliť $b \rightarrow \infty$.

Skúmame izolovaný supravodič v nulovom aplikovanom poli $\mathbf{A} = 0$. Potom okrajová podmienka na povrchu supravodiča je $\mathbf{n} \cdot \nabla \psi = 0$. Riešenie SchR hľadáme v tvare $\psi(\mathbf{r}, t) = |\psi| e^{i\theta(t)}$, kde amplitúda aj fáza sú konštantné v celom objeme vzorky. Pre časový vývoj fázy makroskopickej vlnovej funkcie dostaneme

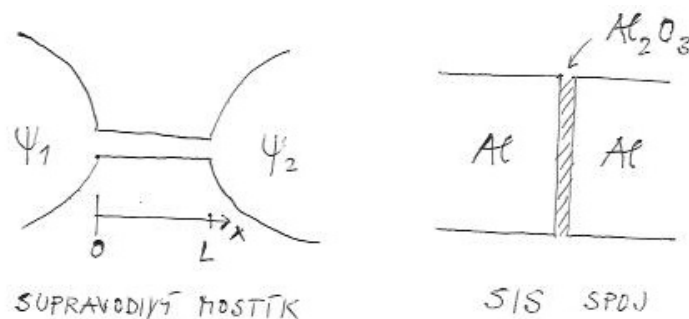
$$\dot{\theta} = -\frac{2\mu}{\hbar}$$

Josephson našiel spôsob, akým možno experimentálne merať fázu makroskopickej vlnovej funkcie supravodičov.

Slabý spoj medzi supravodičmi

Josephson navrhol postupovať podobne ako pri skúmaní žiarenia čierneho telesa, ktoré sa pozoruje tak, že v dutine pri danej teplote vytvoríme malý otvor, ktorým žiarenie môže vychádzať von a vychádzajúce žiarenie môžeme analyzovať. Ak je otvor dostatočne malý, potom prakticky nenaruša tepelnú rovnováhu v dutine.

Analógom čierneho telesa je izolovaný supravodič a analógom malého otvoru v dutine je pripojenie supravodiča na analyzačné zariadenie cez súčiastku s veľkým elektrickým odporom, ktorá zaručí, že zo skúmaného supravodiča odchádza len veľmi málo elektrónov a teda stav supravodiča nezávisí od prítomnosti väzby s meracím zariadením.



Kľúčovou otázkou pritom je, čo má byť meracím zariadením. Josephson navrhol použiť ako meracie zariadenie iný supravodič. Existuje niekoľko možností, ako vytvoriť spoj realizujúci slabú väzbu medzi supravodičmi, tzv. slabý spoj. Spomeňme tri základné možnosti:

1. supravodiče možno oddeliť tenkou vrstvou izolujúceho materiálu, cez ktorú elektróny prechádzajú vďaka tunelovému efektu; tento typ spojov sa nazýva tunelový spoj alebo SIS spoj (supravodič-izolant-supravodič).

2. supravodiče sú oddelené vrstvou normálneho kovu, tzv. SNS spoj (supravodič-normálny kov-supravodič).
3. supravodiče sú spojené tenkým supravodivým drôtikom, tzv. supravodivé mostíky.

Rovnovážny prúd cez slabý spoj

Skúmame supravodivý prúd, ktorý tečie medzi dvomi masívnymi supravodičmi s makroskopickými vlnovými funkciami ψ_1 a ψ_2 . Predpokladáme, že oba supravodiče sú v termodynamickej rovnováhe, t.j. chemický potenciál v oboch supravodičoch je rovnaký a rovný μ . Máme teda riešiť SchR (1) pre vlnovú funkciu s energiou $\varepsilon = 2\mu$. Riešenie preto hľadáme v tvare $\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})e^{-2i\mu t/\hbar}$ a po dosadení do SchR dostávame rovnicu pre φ

$$(-i\hbar\nabla + 2e\mathbf{A})^2\varphi = 0$$

Predpokladáme opäť, že magnetické pole je nulové, $\mathbf{A} = 0$. Z okrajovej podmienky aplikovanej na mostík vyplýva, že φ sa mení iba pozdĺž mostíka. Položme súradnicovú os x do smeru mostíka. Potom rovnica pre φ nadobudne tvar $\varphi'' = 0$. Ak konce mostíka ležia v bodoch $x = 0$ a $x = L$, potom okrajové podmienky budú $\varphi(0) = \psi_1$ a $\varphi(L) = \psi_2$. Riešením je

$$\varphi(x) = \psi_1 + \frac{x}{L}(\psi_2 - \psi_1)$$

Preto v mostíku tečie supravodivý prúd s hustotou

$$j = \frac{ie\hbar}{2m}(\varphi^*\varphi' - \varphi\varphi'^*) = \frac{ie\hbar}{2mL}(\psi_1^*\psi_2 - \psi_1\psi_2^*) = j_0 \sin(\theta_1 - \theta_2); \quad j_0 = \frac{e\hbar}{2mL}|\psi_1||\psi_2|$$

kde v poslednej rovnici sme vlnové funkcie v supravodičoch 1 a 2 parametrizovali vzťahmi $\psi_{1,2} = |\psi_{1,2}|e^{i\theta_{1,2}}$. Všimnime si, že ak sú fázy supravodičov rôzne, cez slabý spoj potečie prúd. Tento výsledok možno chápať ako diskretizovanú verziu Londonovej rovnice

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0\lambda_L^2}\left(\mathbf{A} + \frac{\hbar}{2e}\nabla\theta\right) = -\frac{\hbar}{2e\mu_0\lambda_L^2}\left(\nabla\theta + \frac{2e}{\hbar}\mathbf{A}\right); \quad j \approx \frac{\hbar}{2e\mu_0\lambda_L^2L}\left(\theta_1 - \theta_2 - \frac{2e}{\hbar}\int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}\right)$$

Druhá rovnica vznikla z prvej integrovaním pozdĺž mostíka a vydelením dĺžkou mostíka.¹ Namiesto $\theta_1 - \theta_2$ v nej vystupuje tzv. kalibračne invariantný rozdiel fáz $\theta_1 - \theta_2 - \frac{2e}{\hbar}\int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. V limite malých fázových rozdielov sa prúd počítaný pomocou Londonovej rovnice musí zhodovať s explicitným riešením SchR. Preto v prítomnosti magnetického poľa rovnicu pre prúd cez slabý spoj píšeme v zovšeobecnenom tvare

$$I = I_0 \sin\left(\theta_1 - \theta_2 - \frac{2e}{\hbar}\int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}\right) \quad \text{Josephsonova rovnica}$$

kde I_0 je tzv. kritický prúd spoja, t.j. maximálny prúd, ktorý môže bezdisipatívne tiecť cez Josephsonov spoj.

Meranie magnetického poľa pomocou SQUIDu

SQUID (t.j. Superconducting QUantum Iterference Device) je prístroj na presné meranie malých zmien magnetického poľa. Meranou veličinou je maximálny prúd $I_{\max}$, ktorý môže bezdisipatívne tiecť cez súčiastku pozostávajúcu z paralelného zapojenia supravodivých vetiev 1 a 2, z ktorých každá je prerušená Josephsonovým spojom (č. 1 a 2). Z hodnoty $I_{\max}$ dostávame informáciu o magnetickom toku Φ cez plochu SQUIDu.

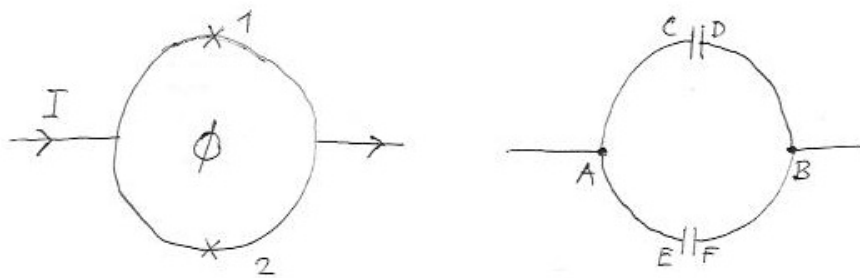
Teraz odvodíme teoretickú predpoveď pre $I_{\max}$. Celkový prúd I tečúci cez SQUID je súčtom prúdov cez vetvy 1 a 2:

$$I = I_1 \sin\theta_1 + I_2 \sin\theta_2$$

kde $I_{1,2}$ sú kritické prúdy spojov 1 a 2 a $\theta_{1,2}$ sú kalibračne invariantné rozdiely fáz na týchto spojoch. Označme body A,B,C,D,E,F na supravodivom obvode podľa obrázku. Potom platí

$$\theta_1 = \theta_C - \theta_D - \frac{2e}{\hbar}\int_C^D \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}; \quad \theta_2 = \theta_E - \theta_F - \frac{2e}{\hbar}\int_E^F \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

¹Vďaka rovnici kontinuity je totiž prúdová hustota nezávislá od x .



Predpokladajme, že spoje 1 a 2 sú natoľko slabé, že spád fázy v ramenách AC, DB, AE, FB možno zanedbať. Potom v týchto ramenách platí $\nabla\theta + \frac{2e}{\hbar}\mathbf{A} = 0$ a preto

$$\theta_C = \theta_A + \frac{2e}{\hbar} \int_C^A \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}; \quad \theta_D = \theta_B + \frac{2e}{\hbar} \int_D^B \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

a podobne

$$\theta_E = \theta_A + \frac{2e}{\hbar} \int_E^A \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}; \quad \theta_F = \theta_B + \frac{2e}{\hbar} \int_F^B \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

Dosaďme teraz rovnice pre θ_C a θ_D do vzťahu pre θ_1 a podobne dosaďme rovnice pre θ_E a θ_F do vzťahu pre θ_2 . Dostaneme

$$\theta_1 = \theta_A - \theta_B + \frac{2e}{\hbar} \int_{BDCA} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}; \quad \theta_2 = \theta_A - \theta_B - \frac{2e}{\hbar} \int_{AEFB} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r};$$

Všimnime si, že platí $\theta_1 - \theta_2 = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$ kde $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ je kvantum magnetického toku. Preto rozdiely fáz $\theta_{1,2}$ môžeme parametrizovať nasledovne

$$\theta_1 = \theta + \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}; \quad \theta_2 = \theta - \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}$$

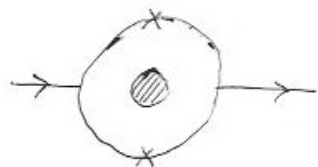
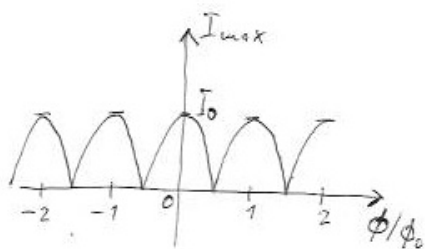
kde θ je voľne premenlivý rozdiel fáz. Pre daný magnetický tok Φ potom celkový prúd bude závisieť od θ nasledovne:

$$I(\theta) = (I_1 + I_2) \cos \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \sin \theta + (I_1 - I_2) \sin \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \cos \theta$$

Maximálny bezdisipatívny prúd $I_{\max}$ potom bude daný maximom funkcie $I(\theta)$. Túto úlohu možno riešiť vo všeobecnosti, tu sa však obmedzíme na symetrický prípad $I_1 = I_2 = I_0/2$, kedy

$$I_{\max} = I_0 \left| \cos \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \right|$$

Zo zmien $I_{\max}$ možno určiť zmeny magnetického toku Φ , čo možno použiť na citlivé meranie magnetickej indukcie B .



AHARONOV-BOHM:
MAGNET. POLE LOKALIZOVANÉ
IBA V SRAFOVANEJ OBLASTI

Jav Aharonova-Bohra Experiment možno uskutočniť tak, že magnetické pole prechádzajúce cez SQUID je lokalizované vnútri solenoidu s polomerom menším než vnútorný otvor SQUIDu. Teda v takejto geometrii je magnetické pole v supravodiči nulové. Napriek tomu $I_{\max}$ je modulovaný s veľkosťou Φ . To znamená,

že v kvantovej mechanike častice (v danom prípade Cooperove páry) interagujú nie s magnetickým poľom $\mathbf{B}$, ale s vektorovým potenciálom $\mathbf{A}$.

Časovo závislý Josephsonov jav

Predpokladajme nakoniec, že medzi supravodivými elektródami 1 a 2 existuje spád napätia $eV = \mu_2 - \mu_1$. Pre jednoduchosť opäť zanedbajme vplyv magnetických polí a položíme $\mathbf{A} = 0$. Potom fázový rozdiel na spoji $\theta = \theta_1 - \theta_2$ sa v čase vyvíja podľa $\dot{\theta} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = \frac{2eV}{\hbar}$, čiže $\theta(t) = \theta(0) + \frac{2eV}{\hbar}t$. Preto prúd cez spoj bude oscilovať,

$$I(t) = I_0 \sin [\theta(0) + \omega_J t]$$

kde $\omega_J = 2\pi K_J V$ je tzv. Josephsonova frekvencia a $K_J = \frac{2e}{\hbar}$ je tzv. Josephsonova konštanta. Časovo závislý Josephsonov jav teda možno použiť na generáciu harmonického prúdu.

Časovo závislý prúd sa stáva zdrojom elektromagnetického žiarenia, ktorého frekvenciu možno veľmi presne merať. Z presného merania napätia aplikovaného na spoj potom možno určovať Josephsonovu konštantu, t.j. pomer fundamentálnych konštánt e a h . Pomocou sofistikovanej realizácie tejto idey možno K_J určiť s extrémnou presnosťou:

$$K_J = \frac{2e}{h} = 483.597891(12) \frac{\text{MHz}}{\mu\text{V}}$$