ELEKTRODYNAMIKA KOVOV

(A) Fenomenologická teória pre longitudinálnu funkciu $\varepsilon_\parallel(\vec q,\omega)$

externý náboj $\quad \delta\rho \, e^{i\vec q\cdot\vec r - i\omega t}$

tieniaci náboj elektrónov $\quad \rho_e \, e^{i\vec q\cdot\vec r - i\omega t}$

tieniaci náboj iónov $\quad \rho_i \, e^{i\vec q\cdot\vec r - i\omega t}$

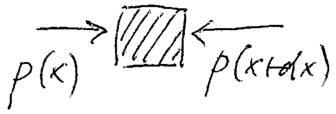
celkový náboj $\quad \rho = \delta\rho + \rho_e + \rho_i$

potenciál
$$\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0 q^2} \equiv \frac{\delta\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_\parallel(q,\omega) q^2} \rightarrow \boxed{\varepsilon_\parallel(q,\omega) = \frac{\delta\rho}{\rho}}$$

Predpoklad:
$$\rho_e = \chi_e(q,\omega)\rho$$
$$\rho_i = \chi_i(q,\omega)\rho$$

Potom
$$\varepsilon_\parallel(q,\omega) = \frac{\rho - \rho_e - \rho_i}{\rho} \rightarrow \boxed{\varepsilon_\parallel(q,\omega) = 1 - \chi_e(q,\omega) - \chi_i(q,\omega)}$$

Počítajme $\chi_e(q,\omega)$:



$$m n \, dx \, dS \frac{dv_x}{dt} = -\left[p(x+dx) - p(x)\right] dS + dx\, dS\, n e E_x$$

$$\boxed{m n \frac{d\vec v}{dt} = -\vec\nabla p + n e \vec E} \quad (*)$$

$\vec\nabla p = \frac{\partial p}{\partial n}\vec\nabla n \qquad$ označme $\rho_e = ne$, $\vec j_e = ne\vec v \qquad v_s^2 = \frac{1}{m}\frac{\partial p}{\partial n}$

Malé kmity:
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec j_e}{dt} = \dfrac{\partial \vec j_e}{\partial t} + \underbrace{(\vec v\cdot\vec\nabla)\vec j_e}_{\propto v^2} \approx \dfrac{\partial \vec j_e}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial \vec j_e}{\partial t} = e\overbrace{\dfrac{\partial n}{\partial t}\vec v} + e n \dfrac{\partial \vec v}{\partial t} \approx e n \dfrac{\partial \vec v}{\partial t} \end{cases}$$

Preto (*) možno písať

$$\boxed{\frac{\partial \vec{j}_e}{\partial t} = -v_s^2 \vec{\nabla} \rho_e + \varepsilon_0 \omega_p^2 \vec{E} - \frac{1}{\tau} \vec{j}_e} \quad (1)$$

nový člen, popisuje relaxáciu prúdu $\vec{j}_e = \vec{j}_e(0)\, e^{-t/\tau}$ pri nulových aplikovaných poliach

rovnica kontinuity $$\boxed{\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot \vec{j}_e = 0} \quad (2)$$

Maxwell $$\boxed{\nabla\cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad (3)$$ ρ = celkový náboj!

z (1,2,3) máme

$$\left[-\left(\frac{1}{\tau} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t} + v_s^2 \Delta\right]\rho_e = \omega_p^2 \rho$$

Fourier $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$, $\vec{\nabla} \to i\vec{q}$:

$$\rho_e = \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \frac{i}{\tau}) - v_s^2 q^2}\,\rho \longrightarrow \boxed{\chi_e(q,\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \frac{i}{\tau}) - v_s^2 q^2}} \quad (4)$$

Odhad v_s pre voľný elektrónový plyn:

$$E = \frac{3}{5} N \varepsilon_F = \frac{3}{5}(3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{N^{5/3}}{\Omega^{2/3}}$$

N = počet elektrónov
Ω = objem

Tlak $p = -\frac{\partial E}{\partial \Omega} = \frac{2}{3}\frac{E}{\Omega} = \frac{2}{5}\varepsilon_F n$

$\downarrow$

$$p = \frac{2}{5}\frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3} n \to \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{5}{3}\frac{p}{n} = \frac{2}{3}\varepsilon_F$$

$$\to v_s^2 = \frac{1}{m}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{3} v_F^2 \qquad \boxed{v_s = \frac{1}{\sqrt{3}} v_F}$$

Ak ióny modelujeme ako kvapalinu častíc s nábojom Ze a koncentráciou $\frac{n}{Z}$, hmotnosťou M:

$$\boxed{\chi_i(q,\omega) = \frac{\Omega_p^2}{\omega(\omega+\frac{i}{\tau_i}) - V_s^2 q^2}} \quad (5)$$

$$\Omega_p^2 = \frac{nZe^2}{M\varepsilon_0}$$

$$V_s^2 = \frac{1}{M}\frac{\partial p_i}{\partial n_i}$$

Rovnice (4,5) určujú $\boxed{\varepsilon_{\parallel}(q,\omega) = 1 - \chi_e(q,\omega) - \chi_i(q,\omega)}$ (6)

ťažko počítať. Malo by vyplývať z kvantovej van der Waalsovej rovnice.

Dôsledky:

(A1) Statické tienenie $\omega = 0$

$$\boxed{\varepsilon_{\parallel}(q,0) = 1 + \frac{k_s^2}{q^2}} \qquad k_s^2 = \frac{\omega_p^2}{v_s^2} + \frac{\Omega_p^2}{V_s^2}$$

Coulomb: $$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}}}{\varepsilon_0 q^2}$$

Tienená interakcia:

$$V(r) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}}\, Q}{\varepsilon_0 q^2 \varepsilon_{\parallel}(q,0)} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\bar{q}\cdot\bar{r}}}{q^2+k_s^2} = \frac{Q e^{-k_s r}}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\Rightarrow \boxed{k_s = \frac{1}{\text{tieniaca dĺžka}}}$$

Správna kvantová teória: tienenie je slabšie!

$$\boxed{V(r) \sim \frac{\cos 2k_F r}{r^3}}$$ Friedelove oscilácie

A2: Kolektívne módy $\quad \varepsilon_\parallel(q,\omega)=0$

$$\varepsilon_\parallel(q,\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - v_s^2 q^2} - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2 - V_s^2 q^2}$$

(pre jednoduchosť zanedbávame tlmenie)

- uvažujme $V_s q \ll \omega \ll v_s q$

$$\varepsilon_\parallel(q,\omega) = 1 + \frac{k_{se}^2}{q^2} - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2} \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \boxed{\omega_q = \frac{q\Omega_p}{\sqrt{k_{se}^2+q^2}}}$$

v dlhovlnnej limite $\boxed{\omega_q = v q}$ (obyčajný zvuk)

$$v = \frac{\Omega_p}{k_{se}} = \frac{\Omega_p}{\omega_p} v_s \longrightarrow \boxed{\frac{v}{v_F} = \sqrt{\frac{mZ}{3M}}} \quad \text{Bohm – Staver}$$

(rádový odhad rýchlosti zvuku v kove)

- uvažujme $\omega \gg v_s q, V_s q$

$$\varepsilon_\parallel(q,\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2+\Omega_p^2}{\omega^2} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$\rightarrow$ plazmón $\boxed{\omega = \omega_p}$

B) Kvázíklasický výpočet vodivosti kovu

Boltzmannova rovnica v priblížení relaxačného času:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_k \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{k}} = -\frac{f - f_0}{\tau}} \qquad (1)$$

$f_0(\vec{k},\vec{r},t)$ = rovnovážna distribučná funkcia elektrónov

$$f = f_0 + \underbrace{g_k e^{i\vec{q}\cdot\vec{r} - i\omega t}}$$

odchýlka od rovnováhy (malá pre malé polia)

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{e\vec{E}}{\hbar} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r} - i\omega t}$$

Dosadíme do (1) a zanedbajme členy rádu E^2 (kde $g \propto E$)

$$\left(-i\omega + i\vec{v}_k\cdot\vec{q} + \frac{1}{\tau}\right) g_k = \frac{e\vec{E}}{\hbar}\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right)\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{k}}$$

použili sme $\quad \frac{\partial f_0}{\partial \vec{k}} = \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{k}}$ $\qquad \approx \delta(\varepsilon)$ pri nízkych teplotách

$$\boxed{g_k = \frac{e\vec{E}\cdot\vec{v}_k\,\tau}{1 - i\omega\tau + i\vec{v}_k\cdot\vec{q}\,\tau}\,\delta(\varepsilon_k)} \qquad (2)$$

Prúdová hustota: $\quad \vec{j} = \frac{2e}{\Omega}\sum_k \vec{v}_k f_k = \frac{2e}{\Omega}\sum_k \vec{v}_k g_k$

Dosadíme do (2):

$$\boxed{\vec{j} = \frac{2e^2\tau}{\Omega}\sum_k \frac{\vec{v}_k\,(\vec{v}_k\cdot\vec{E})\,\delta(\varepsilon_k)}{1 - i\omega\tau + i\vec{v}_k\cdot\vec{q}\,\tau}} \qquad (3)$$

$$\frac{1}{\Omega}\sum_k = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

(3) možno písať v tvare $j_i = \sigma_{ij} E_j$

$$\boxed{\sigma_{ij}(\vec{q},\omega) = \frac{e^2\tau}{4\pi^3\hbar}\oint \frac{d^2k}{v_k}\,\frac{v_k^i\, v_k^j}{1 - i\omega\tau + i\vec{v}_k\cdot\vec{q}\,\tau}} \qquad (4)$$

integrácia cez Fermiho plochu

Špeciálny prípad: izotropná Fermiho plocha, $q \parallel z$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\parallel \end{pmatrix}$$

označme $\boxed{v_F\tau = \ell}$ (stredná voľná dráha)

$$\boxed{\sigma_\perp = \frac{e^2 k_F^2 \ell}{2\pi\hbar}\int_{-1}^{1}\frac{dt\,(1-t^2)}{1 - i\omega\tau + iq\ell t}}$$

$$\boxed{\sigma_\parallel = \frac{e^2 k_F^2 \ell}{\pi\hbar}\int_{-1}^{1}\frac{dt\,t^2}{1 - i\omega\tau + iq\ell t}}$$

použili sme

$$\oint d^2k = k_F^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\,\sin\vartheta = 2\pi k_F^2\int_{-1}^{1}dt$$

kde $t = \cos\vartheta$

vzorce pre $\sigma_\parallel(q,\omega)$
$\sigma_\perp(q,\omega)$

Špec. prípady:

$$\sigma_\parallel(0,\omega) = \sigma_\perp(0,\omega) = \frac{2}{3}\,\frac{e^2 k_F^2 \ell}{\pi\hbar}\,\frac{1}{1-i\omega\tau} = \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau}, \qquad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

to súhlasí s formulou

$$\varepsilon_R(0,\omega) = \varepsilon_\parallel(0,\omega) = \varepsilon_\perp(0,\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega + \frac{i}{\tau}\right)}$$

$$\left(= 1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)$$

(C) Odrazivosť kovu

$$\varepsilon_R(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \frac{i}{\tau})}$$

Typické škály :

$\hbar\omega_p$	7,1	5,7	15,3	10,6	(eV)
kov	Li	Na	Al	Mg	

$$\frac{\hbar}{\tau} \lesssim T \approx 0.03\,\text{eV} \quad (\text{izbová teplota})$$

• uvažujme $\omega \ll \frac{1}{\tau} \longrightarrow \varepsilon_R \approx 1 + \frac{i\omega_p^2\tau}{\omega} \approx i\,\frac{\omega_p^2\tau}{\omega}$

Pretože $\frac{\omega_p^2\tau}{\omega} = \frac{(\omega_p\tau)^2}{\omega\tau} \gg (\omega_p\tau)^2 \gg 1$

$$n + i\varkappa = \sqrt{\varepsilon_R} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega_p^2\tau}{\omega}}$$

$\perp$ mód: $cq = \omega(n+i\varkappa) \longrightarrow q = \frac{1+i}{\delta}\,, \quad \delta = \lambda\sqrt{\frac{2}{\omega\tau}}$

δ … hĺbka vniku

Priestorová závislosť:

$$e^{iqx} = e^{ix/\delta}\, e^{-x/\delta}$$ … tlmenie na škále δ

Skinový jav : RF pole sa šíri po povrchu vodiča

s rastom ω klesá hĺbka vniku

↓

pre dostatočne veľké frekvencie je $\delta \sim \ell$

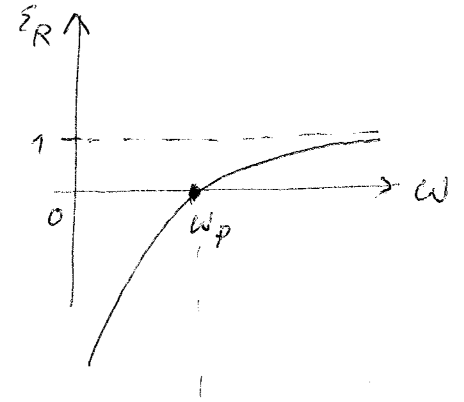
ℓ … stredná voľná dráha

↓

pre vyššie frekvencie je potrebné zahrnúť nelokálne efekty (t.j. závislosť σ od q)

• optická oblasť: $\omega \gg \frac{1}{\tau} \;\longrightarrow\; \varepsilon_R \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

$$R = \frac{(n-1)^2 + \varkappa^2}{(n+1)^2 + \varkappa^2}$$



$$\omega < \omega_p: \quad \left. \begin{array}{l} n \approx 0 \\ \varkappa \approx \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \end{array} \right\} \to R \approx 1$$

$$\omega > \omega_p: \quad \left. \begin{array}{l} n \approx \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \\ \varkappa \approx 0 \end{array} \right\} \to R \approx \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$