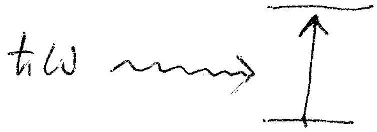
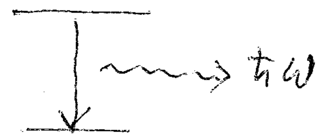
ROZPTYL SVETLA

Doteraz sme študovali:

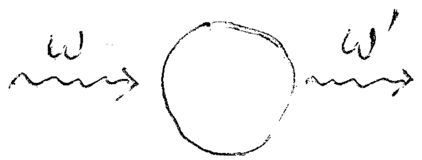
Absorpcia:



Emisia:



Teraz budeme študovať rozptyl:

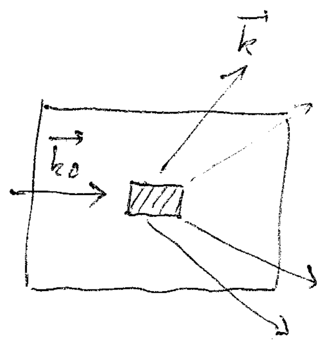


elastický rozptyl: $\omega' = \omega$ (Rayleigh)

neelastický rozptyl: $\omega' \neq \omega$ (Raman)

① Rayleighov rozptyl

Uvažujme médium ε, μ



Šrafovaná oblasť: fluktuácie $\delta\varepsilon, \delta\mu$

(1) $\nabla \times E + \dfrac{\partial B}{\partial t} = 0 \qquad \nabla \cdot B = 0$

(2) $\nabla \times H = \dfrac{\partial D}{\partial t} \qquad \nabla \cdot D = 0$

(3) $D = (\varepsilon + \delta\varepsilon) E \qquad \delta\varepsilon, \delta\mu \neq 0$ iba v šrafovanej oblasti

(4) $B = (\mu + \delta\mu) H \qquad \varepsilon, \mu = \text{const}$

$$(1) \Rightarrow \underbrace{\nabla \times (\nabla \times D)}_{\vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot D}_{=0}) - \Delta \vec{D}} + \nabla \times \nabla \times \underbrace{(\varepsilon E - D)}_{-\delta\varepsilon E} + \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\nabla \times H}_{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \underbrace{(B - \mu H)}_{\delta\mu H} = 0$$

$$\left(\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{D} = -\nabla \times (\nabla \times \delta\varepsilon E) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \delta\mu H$$

Ansatz: všetky polia majú časovú závislosť $e^{-i\omega t}$ → vypíšeme ju

$$\boxed{(\Delta + k^2)\vec{D} = -\nabla \times (\nabla \times \delta\varepsilon E) - i\omega\varepsilon \nabla \times \delta\mu H} \qquad k^2 = \varepsilon\mu\omega^2$$

Zanedbajme $\delta\mu$ (malé)

Bornova aproximácia: píšme na pravej strane $\vec{E} \to \underbrace{\vec{E}_0 e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}}}_{\text{dopadajúca vlna}}$

$$\boxed{(\Delta + k^2)\vec{D} = -\nabla\times\nabla\times\delta\varepsilon\,\vec{E}_0\, e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}}} \qquad (5)$$

Greenova funkcia $\quad (\Delta + k^2)\, G(\vec{x},\vec{x}') = -\delta(\vec{x}-\vec{x}')$

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Preto riešenie rovnice (5) pre body $\vec{x}$ ďaleko od rozptylovej oblasti (v smere $\vec{k}$):

$$\vec{D}(\vec{x}) = \underbrace{\varepsilon_0 \vec{E}_0 e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}}}_{\text{dopadajúca vlna}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\, \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, \vec{\nabla}'\times\left(\vec{\nabla}'\times\delta\varepsilon\,\vec{E}_0 e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}'}\right)}_{\text{rozptýlená vlna}}$$

$|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$: $\quad |\vec{x}-\vec{x}'| \approx \sqrt{\vec{x}^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{x}'} \approx |\vec{x}| - \vec{n}\cdot\vec{x}'$

$\vec{n}$ = jedn. vektor v smere $\vec{k}$ alebo $\vec{x}$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} + \frac{e^{ikx}}{4\pi\varepsilon x}\int d^3x'\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'}\, \vec{\nabla}'\times\left(\vec{\nabla}'\times\delta\varepsilon\,\vec{E}_0 e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}'}\right)$$

$$\int d^3x'\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'}\, \partial'_m F = i\int d^3x'\, k_m F e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'} \quad \text{(per partes)}$$

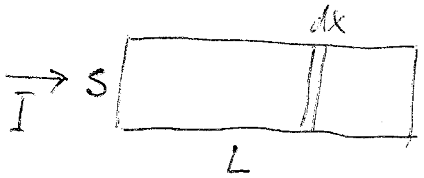
Teda $\vec{\nabla}' \to i\vec{k}$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} - \frac{k^2 e^{ikx}}{4\pi\varepsilon x}\, \vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{p})} \qquad (6)$$

kde
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{p} &= \alpha\vec{E}_0 \\ \alpha &= \int d^3x\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\, \delta\varepsilon(\vec{x}) \end{aligned}} \qquad (7) \qquad \vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_0$$

Rovnica (6) je rovnica pre žiarenie dipólu $\vec{p}$

účinný prierez: $\sigma = \frac{k^4}{6\pi}\left|\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\right|^2$



dopadajúci výkon : $I = S \cdot j$

vyžiarený výkon : $-\sigma \cdot j$

výkon vyžiarený na dĺžke dx : $dI = -\sigma j \, dx/L$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dx}{\varkappa} \longrightarrow \boxed{I = I_0 e^{-x/\varkappa}} \qquad \varkappa = \text{extinkčná dĺžka}$$

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{\sigma}{V} = \frac{1}{V}\frac{k^4}{6\pi\varepsilon^2}\left|\int d^3x\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\,\delta\varepsilon(\vec{x})\right|^2$$

Ak $\delta\varepsilon(\vec{x})$ fluktuuje na škálach $\gg \lambda$, kde $\lambda \sim \frac{1}{q}$,

potom

$$\boxed{\frac{1}{\varkappa} = \frac{k^4}{6\pi\varepsilon^2}\,\frac{\left|\int d^3x\,\delta\varepsilon(\vec{x})\right|^2}{V}} \quad (8)$$

Predpokladajme, že ε je funkciou iba hustoty

$$\to \quad \delta\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\delta\rho \qquad \int d^3x\,\delta\varepsilon(\vec{x}) = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\int d^3x\,\delta\rho = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\,\delta N$$

δN = fluktuácia celkového počtu častíc

$$\to \quad \boxed{\frac{1}{\varkappa} = \frac{k^4}{6\pi\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)^2\frac{\langle\delta N^2\rangle}{V}}$$

ukážeme, že $\frac{\langle\delta N^2\rangle}{V} = T\frac{\partial\rho}{\partial\mu}$ (*) $\Longrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{\varkappa} = \frac{\omega^4}{6\pi c^4\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)^2 T\frac{\partial\rho}{\partial\mu}}$

$\frac{\partial\rho}{\partial\mu} \propto$ stlačiteľnosť; v blízkosti kritického bodu $\frac{\partial\rho}{\partial\mu} \to \infty \Longrightarrow \varkappa \to 0$
(kritická opalescencia)

4 Dokázať $\frac{\langle \delta N^2 \rangle}{V} = T \frac{\partial \rho}{\partial \mu}$:

$\langle \delta N^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$. Na druhej strane: $\langle N \rangle = e^{\frac{\Omega}{T}} \sum_n N_n e^{\frac{\mu N_n - E_n}{T}}$

Potom
$$\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu} = \frac{1}{T} \underbrace{\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}}_{= -\langle N \rangle} \langle N \rangle + \frac{1}{T} \underbrace{e^{\frac{\Omega}{T}} \sum_n N_n^2 e^{\frac{\mu N_n - E_n}{T}}}_{\langle N^2 \rangle} = \frac{1}{T}\left(\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2\right)$$

čbtd.

Ramanov rozptyl

uvažujme rovinnú vlnu $E(t) = E_0 \cos\omega t$

dopadajúcu na médium s časovo závislou polarizovateľnosťou

$$\chi(t) = \chi_0\left[1 + \alpha \cos\omega_0 t\right]$$

ω_0 .. napr. fonónová frekvencia $\longrightarrow$ $u(t)$ .. deformácia

indukovaná polarizácia:

$$P(t) = \varepsilon_0 E_0 \chi_0 \left[\cos\omega t + \alpha \cos\omega_0 t \cos\omega t\right]$$

$$D(t) = \varepsilon_0 E(t) + P(t)$$

pružný rozptyl fotónu

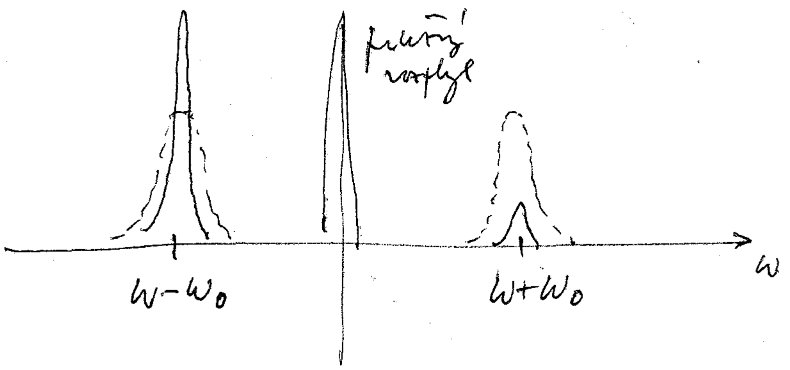
$$\boxed{\begin{aligned} D(t) = {} & \varepsilon_0 (1+\chi_0) E_0 \cos\omega t \\ & + \frac{\varepsilon_0}{2} \alpha \chi_0 E_0 \cos(\omega+\omega_0)t + \frac{\varepsilon_0}{2} \alpha \chi_0 E_0 \cos(\omega-\omega_0)t \end{aligned}}$$

anti-Stokesov proces
absorpcia fonónu $\propto n(\omega_0)$

Stokesov proces
emisia fonónu $\propto n(\omega_0)+1$

$$\frac{I(\omega+\omega_0)}{I(\omega-\omega_0)} = \frac{n(\omega_0)}{n(\omega_0)+1} = e^{-\frac{\hbar\omega_0}{T}}$$

pomer intenzít



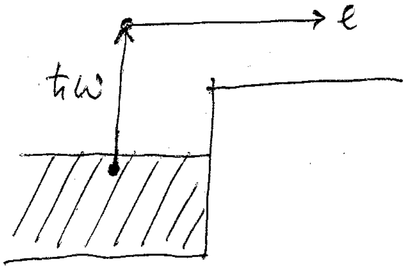
— = malá teplota

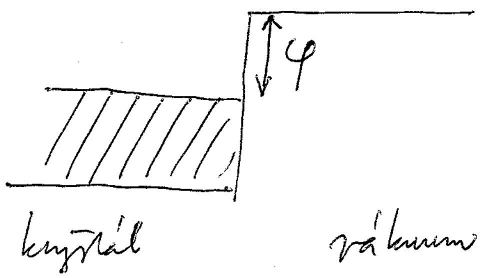
--- = veľká teplota

Ramanov rozptyl druhého rádu: ak $\chi(t) = \chi_0\left[1 + \beta u^2(t)\right]$

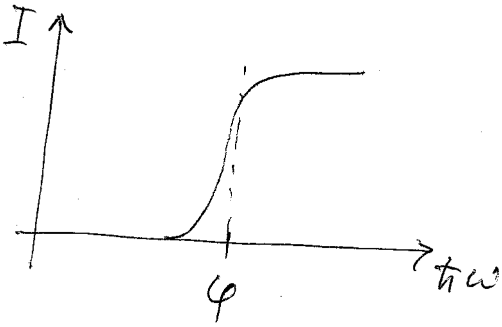
Fotoemisia

① meranie výstupnej práce:





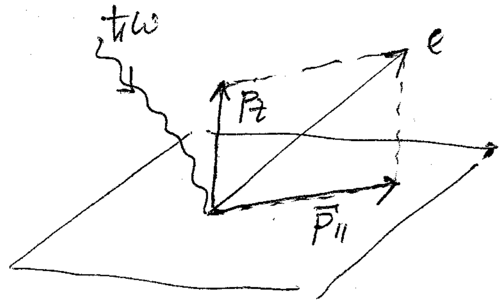
fotoemisný prúd:



výst. práca závisí od orientácie povrchu:

Ag	(100)	4.64 eV
	(110)	4.52 eV
	(111)	4.74 eV

② uhlovo rozlíšená fotoemisná spektroskopia (ARPES):

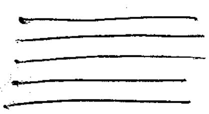


dipólový prechod medzi stavom s $\vec k$, energia $\varepsilon_k - \varphi$ v kryštáli a stavom $\vec P$, $\frac{\vec P^2}{2m}$ vo vákuu

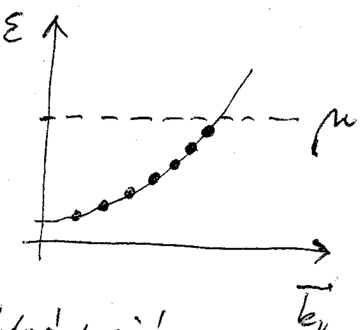
zachovanie energie: $\hbar\omega + \varepsilon_k - \varphi = \frac{\vec P^2}{2m}$

zachovanie ∥ zložky hybnosti: $\vec k_\parallel + \underbrace{\vec K_\parallel}_{\text{vektor inverznej mriežky}} = \vec P_\parallel$

↓ možno merať ~~ε_k~~ $\varepsilon_k(\vec k_\parallel)$ – užitočné pre vrstevnaté materiály



ε_k slabo závisí od k_z



možno merať $\varepsilon(\vec k_\parallel)$ pre obsadené stavy! ($\varepsilon_k < \mu$)

možno merať aj ε_k pre systémy ktoré majú gap (nevodiče, polovodiče) – μ sa meria pomocou fotoemisie + dobrého kovu v dobrom kontakte so vzorkou

Energetické straty rýchlych častíc

Uvažujme rýchlu alebo ťažkú časticu, ktorej rýchlosť $\vec{v}$ je takmer konštantná

$$\rho(\vec{r},t) = e\,\delta(\vec{r}-\vec{v}t)$$

Definujme Fourier. transf.:
$$\rho(\vec{r},t) = \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int\frac{d\omega}{2\pi}\,\rho_q\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}-i\omega t}$$

$$\rho_q = \int d^3r\int dt\,\rho(\vec{r},t)\,e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}+i\omega t}$$

Elektrické pole:
$$i\vec{q}\cdot\vec{E}_q = \frac{\rho_q}{\varepsilon_0\varepsilon_R(q)} \qquad q\equiv(\vec{q},\omega)$$

$$\vec{E}_q = \frac{-i\vec{q}\,\rho_q}{\varepsilon_0 q^2\varepsilon_R(q)} \qquad \rho_q = \int d^3r\int dt\, e\,\delta(\vec{r}-\vec{v}t)\,e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}+i\omega t}$$

$$\rho_q = 2\pi e\,\delta(\omega-\vec{v}\cdot\vec{q})$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int\frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{-i\vec{q}\,\rho_q}{\varepsilon_0 q^2\varepsilon_R(q)}\,e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}-i\omega t} = \frac{-ie}{\varepsilon_0}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{\vec{q}}{q^2}\,\frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}-i\vec{v}\cdot\vec{q}t}}{\varepsilon_R(\vec{q},\vec{v}\cdot\vec{q})}$$

sila pôsobiaca na časticu:

$$\vec{F} = e\vec{E}(\vec{r}=\vec{v}t) = -i\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2}\,\vec{q}\left[\frac{1}{\varepsilon_R(\vec{q},\vec{v}\cdot\vec{q})}-1\right]$$

sila, ktorá by pôsobila na časticu idúcu cez vákuum

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R' + i\varepsilon_R''$$

$$\varepsilon_R'(\vec{q},\omega) = \varepsilon_R'(\vec{q},-\omega)$$

$$\varepsilon_R''(\vec{q},\omega) = -\varepsilon_R''(\vec{q},-\omega)$$

párna funkcia $\vec{q}$

$$\frac{1}{\varepsilon_R} = \frac{\varepsilon_R' - i\varepsilon_R''}{|\varepsilon_R|^2}$$

nepárna funkcia $\vec{q}$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\varepsilon_R}\right) = \frac{-\varepsilon_R''}{|\varepsilon_R|^2}$$

$$\vec{F} = -\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\underbrace{\frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2}}_{\text{nepárna funkcia } \vec{q}}\,\vec{q}\left[\frac{\cancel{\varepsilon_R'}+\varepsilon_R''}{|\varepsilon_R(\vec{q},\vec{v}\cdot\vec{q})|^2}\cancel{-1}\right]$$

sila brzdiaca časticu $\longrightarrow$ $\boxed{\vec{F} = -\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2}\,\vec{q}\;\mathrm{Im}\left[\frac{-1}{\varepsilon_R(\vec{q},\vec{v}\cdot\vec{q})}\right]}$

Tú istú formulu možno písať

$$\boxed{\vec{F} = -\sum_q \frac{\hbar\vec{q}}{\tau_q}}$$ – sila vzniká emitovaním hybnosti $\hbar\vec{q}$ do systému za čas τ_q

$$\boxed{\frac{1}{\tau_q} = \frac{1}{\Omega}\frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2}\frac{1}{\hbar}\,\mathrm{Im}\left[\frac{-1}{\varepsilon_R(\vec{q}, \vec{v}\cdot\vec{q})}\right]}$$ .. pravdepodobnosť emitovania hybnosti $\hbar\vec{q}$

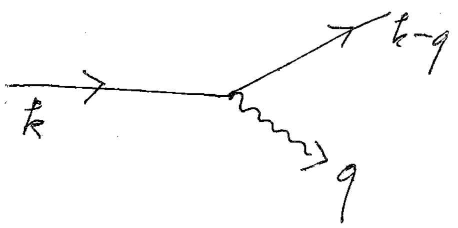
Fenomenologický model:

$$\varepsilon_R(q,\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+i0) - v_s^2 q^2} \longrightarrow \boxed{\left(\frac{-1}{\varepsilon_R}\right)'' = \frac{\pi\omega_p^2}{2\omega_q}\left[\delta(\omega-\omega_q) - \delta(\omega+\omega_q)\right]}$$

kde $\omega_q = \sqrt{\omega_p^2 + v_s^2 q^2}$

Potom $\vec{F} = -\sum_q \frac{\hbar\vec{q}}{\tau_q}$

kde $$\frac{1}{\tau_q} = \frac{1}{\Omega}\frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2}\frac{\pi\omega_p^2}{\omega_q}\delta(\vec{v}\cdot\hbar\vec{q} - \hbar\omega_q)$$



$$\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q} = \frac{\hbar^2}{2m}\left[k^2 - (k-q)^2\right] \approx \frac{\hbar^2}{2m} 2\vec{k}\cdot\vec{q}$$

$$\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q} \approx \vec{v}\cdot\hbar\vec{q} \qquad \vec{v} = \frac{\hbar\vec{k}}{m}$$

Teda $$\boxed{\frac{1}{\tau_q} = \frac{1}{\Omega}\frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2}\frac{\pi\omega_p^2}{\omega_q}\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q} - \hbar\omega_q)}$$

čiže rýchla častica stráca kvantami násobky energie $\boxed{\hbar\omega_q \approx \hbar\omega_p}$