

Mechanika tekutín

Newton:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{f} \quad (1) \quad \rho = \text{hustota tekutiny}$$

$$d\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r} + \vec{v} dt, t + dt) - \vec{v}(\vec{r}, t) \quad \text{rychlôt' tej istej častice v čase } t+dt \text{ a } t$$

$$\left[\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] \quad (2)$$

zákon zachování počtu částic ($\Rightarrow$ hmotnosti)

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \right] \quad (3)$$

z (1,2,3) můžeme psát

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = -\partial_k \Pi_{ik} + f_i \quad \Pi_{ik} = \delta_{ik} p + \rho v_i v_k$$

(zákon zachování hybnosti)

vily tekutiny: 1, nelineární gradienty rychlosti

2, rovné 0 pro rotační proudění $\rightarrow$ $\text{rota} = 0$

$$\sigma'_{ik} = \gamma (\partial_i v_k + \partial_k v_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} \partial_l v_l) + \xi \delta_{ik} \partial_l v_l$$

viskozitní tenzor napětí

γ, ξ = pružná a dynamická koeficienty viskozity

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \vec{f} + \gamma \Delta \vec{v} + \left(\xi + \frac{2}{3} \gamma \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

Navier - Stokesova rovnice

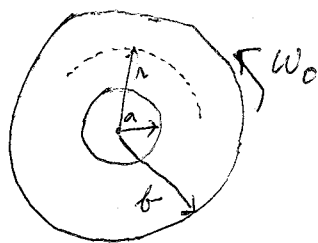
Nesklečkovská aproximace: $\rho = \text{const} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, $\sigma'_{ik} = \gamma (\partial_i v_k + \partial_k v_i)$

Potom

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \vec{f} + \gamma \Delta \vec{v}$$

Okrajové podmienky: na povrchu relatívna rýchlosť voči nádobe = 0
(Feynman: práca na rozťahoch reťazí!)

Meranie vrtivosti:



vnutorný valec stojí, vonkajší sa točí ... ω_0

už na polomere r je rýchlosť ω

$$x = r \cos \omega t \rightarrow v_x = -\omega y$$

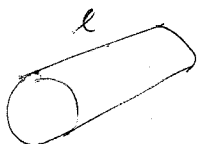
$$y = r \sin \omega t \rightarrow v_y = \omega x$$

Počítajme kosoť σ'_{ik} pozdĺž x-ovej osi: ($y=0$)

$$\partial_x v_x = 0 \quad \partial_x v_y = \omega + r \frac{d\omega}{dr}$$

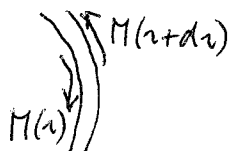
$$\partial_y v_y = 0 \quad \partial_y v_x = -\omega$$

$l = \text{dĺžka valca}$



$$\rightarrow \text{šmykové napätie} \quad \sigma' = \gamma (\partial_x v_y + \partial_y v_x) = \gamma r \frac{d\omega}{dr}$$

$$\text{moment vŕty} \quad M(r) = 2\pi r^2 l \sigma' = 2\pi \gamma l r^3 \frac{d\omega}{dr}$$



$$r \text{ ustálenom stave} \quad M(r+dr) = M(r)$$

(celkový moment vŕt = 0)

$$\rightarrow r^3 \frac{d\omega}{dr} = \text{const} \quad \omega(a) = 0$$

$$\omega(b) = \omega_0$$

Teda moment vŕt

$$M = \frac{4\pi \gamma l a^2 b^2 \omega_0}{b^2 - a^2}$$

$$\frac{\omega(r)}{\omega_0} = \frac{b^2}{r^2} \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

... toto je moment vŕty, ktorý'm pôsobí
kráľovina na vnútorný valec
ale na valec nemôže, musíme ho
dotať momentom vŕty - M

$\rightarrow$ meranie M určuje γ

Porovnanie klasiku a lineárnej teórie

uvážime malé knihy $\rightarrow$ lineárnu teóriu Navier-Stokes:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial \rho} \vec{\nabla} p + \gamma \Delta \vec{v} + \left(\xi + \frac{\gamma}{3}\right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (\vec{f}=0)$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{u}} \approx \rho_0 - \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$$

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial p}{\partial \rho} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \gamma \Delta \vec{v} + \left(\xi + \frac{\gamma}{3}\right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})}$$

klasicky

isotropne kontinuum fyzika:

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (1 + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \underbrace{\mu \Delta \vec{u}}_{\text{také isté derivácie čelny}} + \gamma \Delta \vec{v} + \left(\xi + \frac{\gamma}{3}\right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})}$$

také isté derivácie čelny

• hlavný rozdiel medzi pevnou látkou a kvapalinou!

• fyzikálne knihy kvantitatívne podrobne: $1 + \mu \leftrightarrow \rho_0 \frac{\partial p}{\partial \rho}$

▼ Aplikácia: Akustika plynových kníh

$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t}, \quad \vec{u}_0 \cdot \vec{k} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega = v_{\perp} k - \frac{i}{2} \frac{\gamma}{\rho} k^2}$$

Príklad 1: na veľkom dlhých časových škálach v kvapalinách difundujú vlny $\approx$ tečenie kvapaliny

Príklad 2: vidieť skutočnosť na prekvapivo čom správne! Hľadáme kvantitatívne s konečným μ (Maxwell):

$$\boxed{\sigma_{ik} = \frac{2\mu}{1 + \frac{i}{\omega\tau}} \mu_{ik}}$$

$\omega\tau \gg 1$: $\sigma_{ik} \approx 2\mu \mu_{ik}$ ($\approx$ kvapalina)

$\omega\tau \ll 1$: $\sigma_{ik} \approx -2i\gamma\omega \mu_{ik}$ (kvapalina)

$$\boxed{\gamma = \mu\tau}$$

Elastické vlastnosti gumy

polymer = N jednotiek s dĺžkou a

medzná hustota - tážakosť a hmotnosť: $P_N(R)$

platí: $P_{N+1}(R) = \int d^3R' P_N(R') P_1(R-R')$

Fourier: $P_N(k) = \int d^3R P_N(R) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}$

$$P_N(R) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_N(k) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}$$

$$\rightarrow P_{N+1}(R) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_N(k) P_1(k) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \rightarrow P_{N+1}(k) = P_N(k) P_1(k)$$

Preto $\boxed{P_N(k) = [P_1(k)]^N}$

$$P_1(k) = \int d^3R P_1(R) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \rightarrow P_1(k=0) = 1$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial k^2} P_1(k) \Big|_{k=0} = \int d^3R R^2 P_1(R) = a^2$$

$$\rightarrow P_1(k) = 1 - \frac{k^2 a^2}{2} \approx e^{-k^2 a^2 / 2}$$

Preto $P_N(k) \approx e^{-N k^2 a^2 / 2}$

$$P_N(R) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-N k^2 a^2 / 2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}$$

využijeme integrály

$$\boxed{\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} &= 1 \\ \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}\sigma} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} &= \sigma^2 \end{aligned}}$$

meďa v meroch x, y, z :

$$\boxed{P_N(R) = \frac{1}{(2\pi N a^2)^{3/2}} e^{-\frac{R^2}{2N a^2}}}$$

preto platí $\int d^3R P_N(R) = 1$

Shedý kvadratický vzorec polynóm L :

$$L^2 = \int d^3R R^2 P_N(R) = 3 \int \frac{d^3x x^2}{\sqrt{2\pi N a^2}} e^{-\frac{x^2}{2Na^2}} = 3Na^2$$

$$L = a\sqrt{3N}$$

• Nehustotné polynóm, $R > L$:

$$S = k_B \ln P_N(R) = S_0 - \frac{3k_B}{2} \frac{R^2}{L^2} \rightarrow \begin{cases} F = F_0 + \frac{k_B T}{2} \frac{R^2}{Na^2} \\ F = F_0 + \frac{3k_B T}{2} \frac{R^2}{L^2} \end{cases}$$

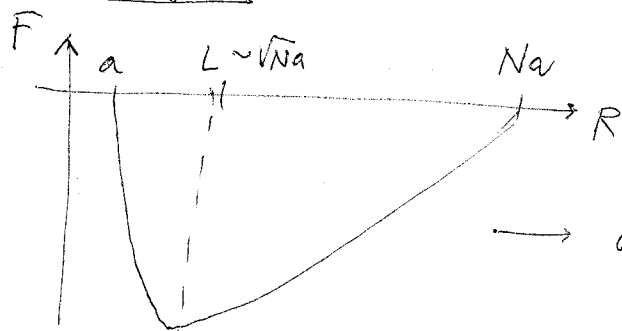
• Sťahanie polynómu do guľy $R < L$:

reťazce M je počet bodov vnútri guľy R ,
 $Ma^2 \approx R^2$

každý bod reťazca má $\frac{N}{M}$, jeho ~~entropia~~ volná energia

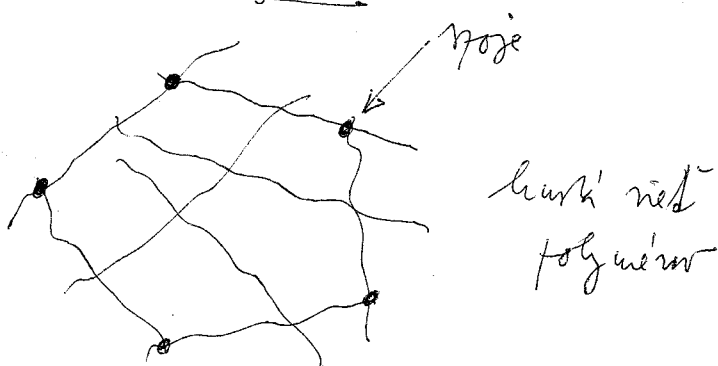
$$F \sim F_0 + \frac{N}{M} \cdot k_B T \cdot \frac{R^2}{Ma^2} \sim \boxed{F_0 + k_B T \frac{L^2}{R^2}}$$

• Volná energia



→ očakávané minimum veľkosti nahradíme

• Vákuové antitvarové guma



kurky nie sú
polynómy

klasické vlastnosti - predpoklady:

1. neskladateľnosť ($\lambda \gg \mu$)
2. ^{volná} energia daná nielen
 energií polynómu
 najmä jejich spoj

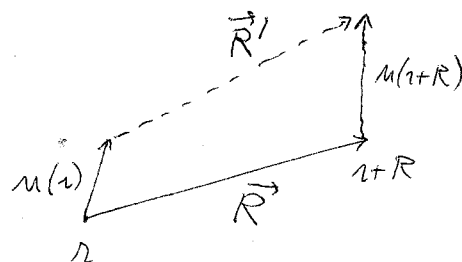
$$F = \frac{3k_B T}{2L^2} \sum_{j=1}^{N_p} \vec{R}_j^2 \quad N_p \text{ polyme'rov}$$

predpoklad 0.3:

$$\vec{R}_j^{\prime\alpha} = (\delta_{\beta\alpha} + \partial_\beta u_\alpha) \vec{R}_j^\beta$$

t.j. radialehoiti medni

vojmi va natiahnu ka' isto, ako huanice mekrid'ku



formu

$$F' = \frac{3k_B T}{2L^2} \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{\alpha\beta\gamma} (\delta_{\beta\alpha} + \partial_\beta u_\alpha) R_j^\beta (\delta_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma u_\alpha) R_j^\gamma$$

pre vela' polyme'rov

$$\sum_{j=1}^{N_p} R_j^\beta R_j^\gamma = N_p \frac{L^2}{3} \delta_{\beta\gamma}$$

$$\delta F = F' - F = \frac{k_B T N_p}{2} (2 \partial_\alpha u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta \partial_\alpha u_\beta)$$

Ustali o funkcie' nme ustali, te pre ustalcitel'no' vykladu

$$\partial_\alpha u_\alpha + \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_\alpha \partial_\beta u_\beta - \partial_\alpha u_\beta \partial_\beta u_\alpha) = 0$$

Preto

$$\delta F = \frac{k_B T N_p}{2} (2 \partial_\alpha u_\beta \partial_\beta u_\alpha - \partial_\alpha u_\alpha \partial_\beta u_\beta)$$

króti predložej rovnici $\propto (\partial u)^4$
→ zanedbat

nachodit $2 u_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}$ a uale (na jednotku' objem)
(symetricka tenzi' vybitcenu)
7. v'istosti o'k energie od. chetm')

$$\delta F = \mu u_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}$$

kde $\mu = k_B T \left(\frac{N_p}{\Omega} \right)$ koncentracie polyme'rov

malá' škála, radi's experimentum!

Ak $\mu \ll 1 \rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} E &= 3\mu \\ \nu &\approx \frac{1}{2} \\ K &\approx 1 \end{aligned}}$$