

Elektrodynamika izotrónnych médií

Skúmame odozvu homogénneho izotrónneho média na rovinne elektromagnetické vlny s časopriestorovým priebehom daným vzťahmi

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\mathbf{q}\omega} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - i\omega t + \gamma t}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_{\mathbf{q}\omega} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - i\omega t + \gamma t},$$

kde $\gamma = 0^+$ opisuje pomalé zapínanie polí. Elektromagnetické vlny popíšeme skalárnym a vektorovým potenciálom

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_{\mathbf{q}\omega} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - i\omega t + \gamma t}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_{\mathbf{q}\omega} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - i\omega t + \gamma t}.$$

Predpokladáme, že elektromagnetické vlny majú malú intenzitu. Našou úlohou je nájsť nábojové a prúdové hustoty indukované v materiáli, o ktorých predpokladáme, že majú rovnaký časopriestorový priebeh, ako budiace polia:

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \varrho_{\mathbf{q}\omega} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - i\omega t + \gamma t}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_{\mathbf{q}\omega} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - i\omega t + \gamma t}.$$

Podľa II.9 medzi amplitúdami budiacich polí $\phi_{\mathbf{q}\omega}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{q}\omega}$ a indukovanými hustotami $\varrho_{\mathbf{q}\omega}$ a $\mathbf{j}_{\mathbf{q}\omega}$ existujú jednoduché algebraické vzťahy¹

$$\begin{aligned} \varrho &= -K_{00}(\mathbf{q}, \omega)\phi - K_{0i}(\mathbf{q}, \omega)A_i; \\ j_i &= -K_{i0}(\mathbf{q}, \omega)\phi - K_{ij}(\mathbf{q}, \omega)A_j, \end{aligned} \quad (1)$$

kde sme kartézske zložky vektorov $\mathbf{A}$ a $\mathbf{j}$ označili A_i a j_i a použili sme Einsteinovu konvenciu, že podľa opakujúceho sa indexu treba sumovať. Zaviedli sme 16 funkcií odozvy $K_{\mu\nu}(\mathbf{q}, \omega)$, kde indexy μ, ν prebiehajú štvorice hodnôt 0,1,2,3.²

Pri kalibračnej transformácii $\phi \rightarrow \phi - i\omega\chi$ a $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - i\mathbf{q}\chi$, kde χ je ľubovoľná funkcia,³ sa elektromagnetické pole nezmení. Preto prírastky indukovaných hustôt j_μ v dôsledku konečného χ musia byť nulové:

$$\begin{aligned} K_{00}(\mathbf{q}, \omega)\omega + K_{0i}(\mathbf{q}, \omega)q_i &= 0; \\ K_{i0}(\mathbf{q}, \omega)\omega + K_{ij}(\mathbf{q}, \omega)q_j &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Na druhej strane, indukované hustoty j_μ musia spĺňať rovnicu kontinuity⁴ $\omega\varrho = \mathbf{q} \cdot \mathbf{j}$ pre všetky voľby A_μ , preto musia platiť vzťahy

$$\begin{aligned} \omega K_{00}(\mathbf{q}, \omega) - q_i K_{i0}(\mathbf{q}, \omega) &= 0; \\ \omega K_{0i}(\mathbf{q}, \omega) - q_j K_{ij}(\mathbf{q}, \omega) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Napokon, v izotrónnom médiu, ktoré je symetrické voči priestorovej inverzii, očakávame nasledovné závislosti funkcií odozvy od zložiek vlnového vektora:

$$K_{i0}(\mathbf{q}, \omega), K_{0i}(\mathbf{q}, \omega) \propto q_i; \quad K_{ij}(\mathbf{q}, \omega) = K(q^2, \omega) \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right) + K'(q^2, \omega) \delta_{ij}. \quad (4)$$

Z rovníc (2, 3, 4) vyplýva, že na charakterizáciu elektromagnetických vlastností izotrónneho kontinua stačia iba dve funkcie $K_{00}(\mathbf{q}, \omega)$ a $K(\mathbf{q}, \omega)$, pomocou ktorých možno vyjadriť všetkých 16 funkcií odozvy $K_{\mu\nu}(\mathbf{q}, \omega)$, pretože $K_{0i}(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{\omega q_i}{q^2} K_{00}(q^2, \omega)$, $K_{i0}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\omega q_i}{q^2} K_{00}(q^2, \omega)$ a

$$K_{ij}(\mathbf{q}, \omega) = K(q^2, \omega) \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right) - \frac{\omega^2}{q^2} K_{00}(q^2, \omega) \delta_{ij}.$$

¹Odteraz budeme pracovať vo Fourierovom obraze a budeme hovoriť o jedinom časopriestorovom priebehu $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - i\omega t + \gamma t}$, preto index $\mathbf{q}\omega$ pri Fourierovej komponente nebudeme uvádzať.

²Naše označenia sú motivované teóriou relativity: potenciály sme združili do štvorvektora $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$ s časovou komponentou $A_0 = \phi$ a podobne hustoty sme združili do štvorvektora $j_\mu = (\varrho, \mathbf{j})$ s časovou komponentou $j_0 = \varrho$.

³V reálnom (nie fourierovskom) priestore ide o kalibračné transformácie $\phi \rightarrow \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$ a $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla \chi$.

⁴V reálnom priestore ide o rovnicu $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$.

Funkcie $K_{00}(\mathbf{q}, \omega)$ a $K(\mathbf{q}, \omega)$ budeme odteraz reprezentovať pomocou dvoch bezrozmerných funkcií: **elektrickej susceptibility** $\alpha(q^2, \omega)$ a **magnetickej susceptibility** $\alpha_m(q^2, \omega)$ vzťahmi

$$K_{00}(q^2, \omega) = \epsilon_0 q^2 \alpha(q^2, \omega); \quad K(q^2, \omega) = -\epsilon_0 c^2 q^2 \alpha_m(q^2, \omega).$$

Ak teraz uvážime, že $E_i = i(\omega A_i - q_i \phi)$ a $(\nabla \times \mathbf{B})_i = q^2 \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right) A_j$, potom materiálové vzťahy (1) môžeme prepísať do nasledovnej explicitne kalibračne invariantnej formy:

$$\boxed{\varrho = -i\epsilon_0 \alpha \mathbf{q} \cdot \mathbf{E}; \quad \mathbf{j} = -i\epsilon_0 \alpha \omega \mathbf{E} + i\epsilon_0 c^2 \alpha_m \mathbf{q} \times \mathbf{B}.} \quad (5)$$

Kvôli zjednodušeniu zápisu tu namiesto $\alpha(q^2, \omega)$ píšeme α a podobne namiesto $\alpha_m(q^2, \omega)$ píšeme α_m . Materiálové vzťahy (5) sú hlavným výsledkom tohto odstavca. Preskúmame niekoľko ich dôsledkov.

1. Ak susceptibility α a α_m možno považovať za konštanty, potom možno zaviesť vektor polarizácie $\mathbf{P} = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}$ a vektor magnetizácie $\mathbf{M} = \epsilon_0 c^2 \alpha_m \mathbf{B}$ a vzťahy (5) možno písať v reálnom (nie Fourierovom) obraze v známom tvare

$$\varrho = -\nabla \cdot \mathbf{P}; \quad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M},$$

s ktorými sa obvykle pracuje v makroskopickej teórii.

2. Ak v rovnici (5) pre $\mathbf{j}$ vyjadríme magnetické pole pomocou elektrického poľa vzťahom⁵ $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega + i\gamma} \mathbf{q} \times \mathbf{E}$, potom túto rovnicu možno chápať ako rovnicu typu $j_i = \sigma_{ij} E_j$ s tenzorom vodivosti

$$\sigma_{ij}(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{i\epsilon_0}{\omega + i\gamma} \left[\omega(\omega + i\gamma) \alpha(q^2, \omega) \delta_{ij} + c^2 q^2 \alpha_m(q^2, \omega) \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right) \right], \quad (6)$$

ktorý má tvar predpovedaný Kubovou formulou, pozri III.10. Tento výsledok možno zapísať ekvivalentne ako dvojicu rovníc

$$\mathbf{j}_{\parallel} = \sigma_{\parallel}(q^2, \omega) \mathbf{E}_{\parallel}; \quad \mathbf{j}_{\perp} = \sigma_{\perp}(q^2, \omega) \mathbf{E}_{\perp},$$

pričom pozdĺžne a priečne zložky sú definované vzhľadom na smer vektora $\mathbf{q}$. Porovnaním s rovnicou (6) pre pozdĺžne a priečne optické vodivosti dostávame vyjadrenia

$$\sigma_{\parallel}(q^2, \omega) = -i\epsilon_0 \omega \alpha(q^2, \omega); \quad \sigma_{\perp}(q^2, \omega) = -i\epsilon_0 \omega \alpha_{\perp}(q^2, \omega),$$

kde sme zaviedli označenie

$$\alpha_{\perp}(q^2, \omega) = \alpha(q^2, \omega) + \frac{c^2 q^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \alpha_m(q^2, \omega).$$

Teda optické odozvy pri konečnom vlnovom vektore sú rôzne pre pozdĺžne a priečne polia! V dlhovlnnej limite $q \rightarrow 0$ pri konečných frekvenciách však očakávame $\sigma_{\parallel}(0, \omega) = \sigma_{\perp}(0, \omega)$, pretože v tejto limite klasifikácia na pozdĺžne a priečne vlnenie nemá zmysel.⁶

3. V prítomnosti externej nábojovej hustoty ϱ^{ext} a priečnej externej prúdovej hustoty $\mathbf{j}^{\perp \text{ext}}$ možno Maxwellove rovnice⁷ štandardným spôsobom redukovať na dve rovnice, jednu pre pozdĺžne a jednu pre priečne polia:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \epsilon_{\parallel}(q^2, \omega) i \mathbf{q} \cdot \mathbf{E}_{\parallel} &= \varrho^{\text{ext}}; \\ \epsilon_0 [c^2 q^2 - \omega^2 \epsilon_{\perp}(q^2, \omega)] \mathbf{E}_{\perp} &= i \omega \mathbf{j}^{\perp \text{ext}}, \end{aligned} \quad (7)$$

do ktorých vstupuje pozdĺžna a priečna dielektrická funkcia, ktoré sú definované vzťahmi

$$\epsilon_{\parallel}(q^2, \omega) = 1 + \alpha(q^2, \omega); \quad \epsilon_{\perp}(q^2, \omega) = 1 + \alpha_{\perp}(q^2, \omega).$$

Prvá z rovníc (7) okrem iného ukazuje, že spontánne pozdĺžne vlny (plazmóny) v médiu existujú za podmienky $\epsilon_{\parallel}(q^2, \omega) = 0$. Podľa druhej z rovníc (7) sa v médiu šíria priečne vlny s disperziou $c^2 q^2 = \omega^2 \epsilon_{\perp}(q^2, \omega)$. V dlhovlnnej limite $q \rightarrow 0$ pri konečných frekvenciách opäť očakávame $\epsilon_{\parallel}(0, \omega) = \epsilon_{\perp}(0, \omega)$. Preto v tejto limite obvykle hovoríme jednoducho o dielektrickej funkcii $\epsilon_R(\omega)$.

⁵Ide o Fourierovu transformáciu Maxwellovej rovnice $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$. Namiesto ω sme aj doteraz mali písať $\omega + i\gamma$.

⁶Preto usudzujeme, že pri konečných frekvenciách musí platiť $\lim_{q \rightarrow 0} q^2 \alpha_m(q^2, \omega) = 0$.

⁷Budiace hustoty vstupujú do rovníc v reálnom priestore $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\varrho + \varrho^{\text{ext}})$ a $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}^{\text{ext}})$.