

Energetické straty rýchlych nabitých častíc

Skúmame pohyb nabitej vysokoenergetickej častice cez elektrónový plyn kovu. Ak častica stráca energiu dostatočne pomaly, potom jej trajektóriu možno aproximovať rovnomerným priamočiarym pohybom. V elektrónovom plyne potom existuje klasická nábojová hustota

$$\rho(\mathbf{r}, t) = -e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t).$$

Časopriestorový priebeh veličín budeme reprezentovať nasledovnými Fourierovými transformáciami:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \rho_{\mathbf{q}\omega} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}; \quad \rho_{\mathbf{q}\omega} = \int d^3\mathbf{r} \int dt \rho(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} + i\omega t}.$$

Preto nábojovú hustotu vysokoenergetickej častice možno písať

$$\rho_{\mathbf{q}\omega} = -2\pi e\delta(\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}).$$

Elektrické pole budené vysokoenergetickou časticou možno jednoducho počítať vo Fourierovom obraze:

$$i\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{q}\omega} = \frac{\rho_{\mathbf{q}\omega}}{\epsilon_0 \epsilon_R(\mathbf{q}, \omega)}; \quad \mathbf{E}_{\mathbf{q}\omega} = \frac{-i\mathbf{q}\rho_{\mathbf{q}\omega}}{\epsilon_0 \epsilon_R(\mathbf{q}, \omega) q^2}.$$

Spätným prechodom do reálneho priestoru dostávame

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{-i\mathbf{q}\rho_{\mathbf{q}\omega}}{\epsilon_0 \epsilon_R(\mathbf{q}, \omega) q^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} = \frac{ie}{\epsilon_0} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{q}}{q^2} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - i\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}t}}{\epsilon_R(\mathbf{q}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{q})}.$$

Silu pôsobiacu na vysokoenergetickú časticu možno počítať nasledovne: $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}(\mathbf{r} = \mathbf{v}t, t)$. Elektrické pole $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ je budené jednak nábojom testovacej častice, ako aj tieniacim nábojmi vo vzorke. Ak od výrazu pre $\mathbf{F}$ odčítame nefyzikálne silové pôsobenie, ktorým vysokoenergetická častica pôsobí sama na seba vo vákuu, dostaneme

$$\mathbf{F} = -e [\mathbf{E}(\mathbf{r} = \mathbf{v}t, t) - \mathbf{E}_{\text{vac}}(\mathbf{r} = \mathbf{v}t, t)] = -i \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^2 \mathbf{q}}{\epsilon_0 q^2} \left[\frac{1}{\epsilon_R(\mathbf{q}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{q})} - 1 \right].$$

Všimnime si, že sila $\mathbf{F}$ je daná integrovaním súčinu nepárnej funkcie $\mathbf{q}$ a funkcie v hranatej zátvorke. Tento integrál je nenulový len pre nepárnu časť hranatej zátvorky. Keďže $\epsilon'_R(\omega) = \epsilon'_R(-\omega)$, $\epsilon''_R(\omega) = -\epsilon''_R(-\omega)$ a

$$\frac{1}{\epsilon_R(\mathbf{q}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{q})} = \frac{\epsilon'_R(\mathbf{q}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}) - i\epsilon''_R(\mathbf{q}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{q})}{|\epsilon_R(\mathbf{q}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{q})|^2},$$

sila $\mathbf{F}$ je daná iba imaginárnou zložkou $1/\epsilon_R(\mathbf{q}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{q})$:

$$\mathbf{F} = - \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^2 \mathbf{q}}{\epsilon_0 q^2} \text{Im} \left[\frac{-1}{\epsilon_R(\mathbf{q}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{q})} \right] = -\frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{q}} \frac{e^2 \mathbf{q}}{\epsilon_0 q^2} \text{Im} \left[\frac{-1}{\epsilon_R(\mathbf{q}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{q})} \right].$$

Silu $\mathbf{F}$ pôsobiacu na vysokoenergetickú časticu možno chápať ako súčet impulzov $\hbar\mathbf{q}$ odovzdaných časticou elektrónovému plynu za čas $\tau_{\mathbf{q}}$:

$$\mathbf{F} = - \sum_{\mathbf{q}} \frac{\hbar\mathbf{q}}{\tau_{\mathbf{q}}}; \quad \frac{1}{\tau_{\mathbf{q}}} = \frac{1}{\Omega} \frac{e^2}{\epsilon_0 q^2} \frac{1}{\hbar} \text{Im} \left[\frac{-1}{\epsilon_R(\mathbf{q}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{q})} \right].$$

Predpokladajme, že hybnosť vysokoenergetickej častice je $\hbar\mathbf{k} = m\mathbf{v}$. Zo zákona zachovania hybnosti vyplýva, že ak častica udelí elektrónovému plynu hybnosť $\hbar\mathbf{q}$, potom jej hybnosť po zrážke s médiom bude $\hbar\mathbf{k} - \hbar\mathbf{q}$. Energia častice sa pritom zmení (do prvého rádu podľa $\mathbf{q}$) nasledovne: $\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \approx \mathbf{v} \cdot \hbar\mathbf{q}$.

V prednáške o coulombovskom plyne sme odvodili nasledovný približný výraz pre relatívnu permiťivitu elektrónového plynu:

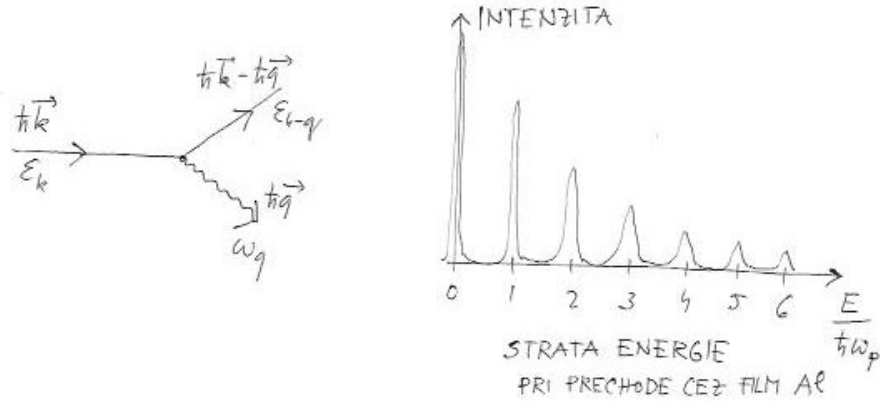
$$\epsilon_R(q, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma) - v_s^2 q^2}; \quad \text{Im} \left[\frac{-1}{\epsilon_R(\mathbf{q}, \omega)} \right] = \frac{\pi\omega_p^2}{2\omega_q} [\delta(\omega - \omega_q) - \delta(\omega + \omega_q)].$$

Pri výpočte imaginárnej časti sme predpokladali $\gamma \rightarrow 0$ a plazmovú frekvenciu pri vlnovom vektore q sme označili $\omega_q = \sqrt{\omega_p^2 + v_s^2 q^2}$. Pre pravdepodobnosť odovzdania hybnosti $\hbar \mathbf{q}$ elektrónovému plynu za jednotku času potom dostávame

$$\frac{1}{\tau_{\mathbf{q}}} = \frac{1}{\Omega} \frac{e^2}{\epsilon_0 q^2} \frac{\pi \omega_p^2}{2\omega_q} \delta(\mathbf{v} \cdot \hbar \mathbf{q} - \hbar \omega_q) \approx \frac{1}{\Omega} \frac{e^2}{\epsilon_0 q^2} \frac{\pi \omega_p^2}{2\omega_q} \delta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar \omega_q),$$

kde sme v prvej rovnici explicitne predpokladali, že v elektrónovom plyne niet voľných plazmónov,¹ a preto člen $\delta(\mathbf{v} \cdot \hbar \mathbf{q} + \hbar \omega_q)$, ktorý popisuje urýchľovanie častice elektrónovým plynom, neprispieva k $1/\tau_{\mathbf{q}}$. Všimnime si, že výraz pre $1/\tau_{\mathbf{q}}$ možno interpretovať ako proces, pri ktorom elektrón s počiatočnou hybnosťou $\hbar \mathbf{k}$ a energiou $\epsilon_{\mathbf{k}}$ vyžiari plazmón s hybnosťou $\hbar \mathbf{q}$ a energiou $\hbar \omega_q$, pričom konečná hybnosť elektrónu $\hbar \mathbf{k} - \hbar \mathbf{q}$ a jeho konečná energia $\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}$ spĺňajú zákony zachovania energie a hybnosti.

Inými slovami, brzdenie vysokoenergetických nabitých častíc elektrónovým plynom prebieha prostredníctvom postupného vyžarovania plazmónov. Keďže vďaka faktoru $1/q^2$ dominuje vyžarovanie dlhovlnných plazmónov s $q \rightarrow 0$ pre ktoré $\omega_q \approx \omega_p$, vysokoenergetická častica v jednotlivých zrážkových procesoch stráca energiu približne v násobkoch $\hbar \omega_p$. Meraním spektier vysokoenergetických častíc, ktoré prechádzajú cez tenký kovový film, možno určiť plazmovú frekvenciu kovu. Pre úplnosť dodajme, že v experimentoch na odraz vysokoenergetické častice obvykle emitujú aj tzv. povrchové plazmóny, t.j. elektromagnetické vlnenie šíriace sa pozdĺž rozhrania dielektrikum-kov.



¹Keďže pri izbovej teplote obvykle $T \ll \hbar \omega_p$.