Report - Ročníkový projekt

Lukáš Hudcovský

Hlavným cieľom projektu bolo overiť Frončekovu hypotézu o farbení kubických grafov, na snarkoch do čo najväčšieho počtu vrcholov, prípadne nájsť protipríklad.

Základná verzia hypotézy znie, že pre každý kubický graf existuje také zafarbenie jeho hrán (farbami 1,2,3), také že hrany okolo jedného vrchola majú buď všetky rôzne farby, alebo všetky rovnakú farbu a zároveň platí že v celom grafe je rovnaký počet vrcholov ktorých hrany sú jednej farby, pre každú z farieb.

V zosilnenej verzii si navyše vieme určiť ľubovoľný vrchol, ktorý má mať všetky hrany okolo neho rôznej farby. Hypotéza je pre 3-zafarbiteľné kubické grafy splnená triviálne, preto sme jej platnosť overovali iba na snarkoch.

<u>Zimný semester:</u>

- V zimnom semestri som najprv v c++ naprogramoval algoritmus ktorý pomocou backtrakingu zistí, či má daný kubický graf regulárne hranové farbenie a následne ho otestoval na niektorých kubických grafoch
- Na základe tohto algoritmu som následne naprogramoval aj algoritmy ktoré zisťujú či má daný kubický graf hranové zafarbenie zo základnej aj zosilnenej verzie hypotézy o hranovom farbení a pridal na ich koniec kontrolnú funkciu aby som zaručil správnosť algoritmu
- Následne som vytvoril program ktorý postupne načítaval zo súborov vygenerované snarky (do 30 vrcholov) vo formáte zoznamu susedov vrcholov, a na každom z nich spustil algoritmus pre základnú/zosilnenú verziu hypotézy. Súbory s vygenerovanými snarkami ktoré sme použili vytvorila štvorica Gunnar Brinkmann, Jan Goedgebeur, Jonas Hägglund a Klas Markström v roku 2012.
- Programy pre obe verzie hypotézy zbehli za 10 a 40 sekúnd, obe z výsledkom že hypotéza pre všetky otestované snarky (kubické grafy bez regulárneho hranového trojzafarbenia) platí.

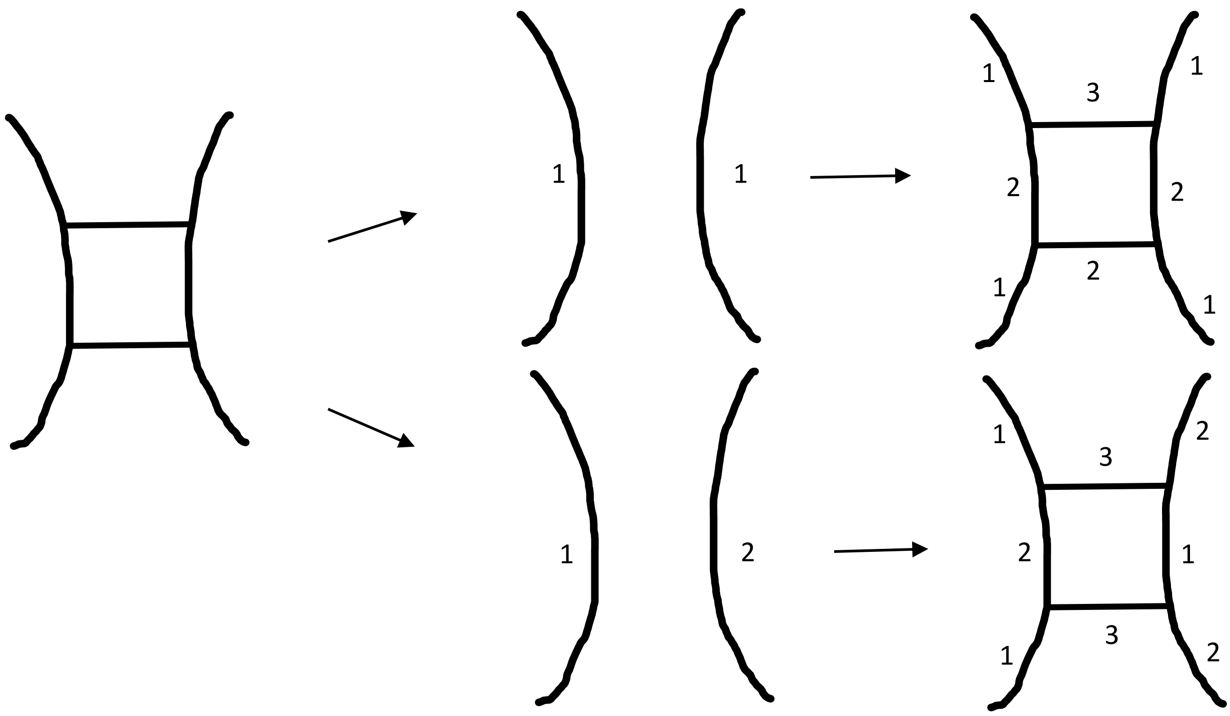
<u>Letný semester:</u>

- V letnom semestri bola hlavná úloha program rozšíriť aj na snarky do 36 vrcholov, čo je momentálne najviac čo sa dá vygenerovať. Tu sme použili grafy zo stránky houseofgraphs.org. Grafy boli v špeciálnom formáte g6, takže som ako prvé musel vyrobiť funkciu, čo tento formát konvertuje na formát zoznamu susedov vrcholov.
- Následne som začal postupne spúšťať program ktorý načítaval tieto grafy a spúšťal na nich algoritmy čo som vyrobil v zimnom semestri. Ale keďže tu už s každými

dvomi pridanými vrcholmi narástol počet grafov najmenej 10-násobne, tak celkový beh programu sa pre 32-36 vrcholové grafy pohyboval v hodinách až malých desiatkach hodín. Preto som si program spúšťal po menších častiach aby som neprehrieval počítač.

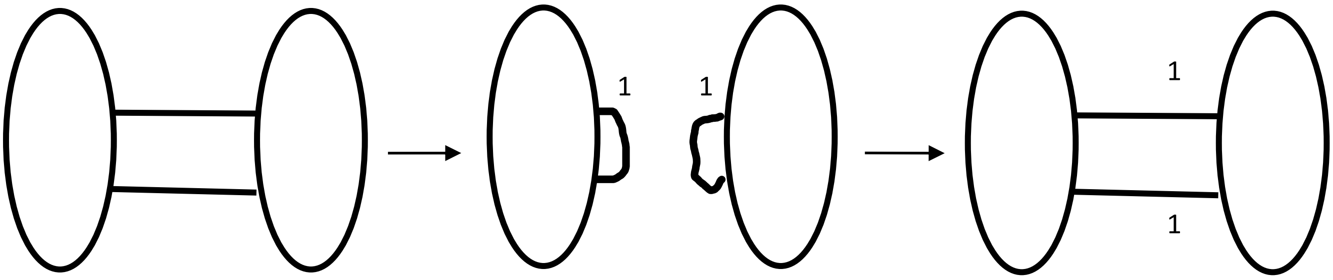
- Výsledok bol opäť taký že pre všetky otestované snarky platí aj základná aj zosilnená verzia hypotézy.
- V tomto momente bolo treba sa zamyslieť, lebo snarky na ktorých sme program testovali neboli úplne všeobecné. Konkrétne to boli všetko bezmostové snarky, bez dvojrezov, netriviálnych trojrezov a nemali kružnice dĺžky tri ani štyri. Takže sme as pokúsili čo najviac grafov s týmito vlastnosťami redukovať na grafy ktoré sme testovali. Tu sú konkrétne redukcie:

- <u>Kružnice dĺžky 4</u>:



- Pri kružnici dĺžky 4 vieme odobrať dve stredné hrany a vyhladiť im prislúchajúce vrcholy. Dá sa ukázať že nový graf je znovu snark, teraz už bez kružnice dĺžky 4 a vieme ho podľa hypotézy zafarbiť. Ak by boli vo farbení dané hrany rovnakej aj rôznej farby, v oboch prípadoch vieme po pridaní odobratých hrán a vrcholov rozšíriť tak že všetky pridané vrcholy majú hrany rôznych farieb a tak nepokazia farbenie.

- <u>Dvojrezy:</u>



- Dvojrez vieme rozdeliť a na každej hrane spojiť príslušné dve hrany do jednej. Tým dostaneme dva menšie snarky bez dvojrezov o ktorých vieme že hypotéza platí, takže ich vieme zafarbiť. Nakoniec vieme príslušné dve hrany zas spojiť (ak by nemali rovnakú farbu, tak vieme farby v jednom grafe spermutovať aby ju rovnakú mali) a tým dostaneme farbenie v pôvodnom grafe.

- Pri kružniciach dĺžky 3 a netriviálnych trojrezoch sme narazili na problémy a zatiaľ sa nám nepodarilo spraviť redukciu na ktorú by stačili základná a zosilnená verzia hypotézy. Takisto sme sa nedostali k mostovým grafom, kde by to zrejme ešte bolo na dlhšie skúmanie.
- Nakoniec sme sa ešte skúšali smery ktorými by sa hypotéza dala rozšíriť. Najprv som vytvoril algoritmus ktorý teraz testoval či sa pri zafarbení z hypotézy dá v grafe naopak vybrať ľubovoľný vrchol ktorý bude “slabý” (všetky hrany okolo budú mať rovnaké farby), ale keď som to spustil na súboroch s malými kubickými grafmi, tak sa veľmi rýchlo našlo veľa protipríkladov.
- Posledná vec čo som ešte vyskúšal bolo, otestovať či sa dajú vybrať v grafe až dva ľubovoľné vrcholy aby boli “silné”. Tento algoritmus som otestoval iba na snarkoch do 30 vrcholov, lebo s tým že počet dvojíc vrcholov je kvadratický od počtu vrcholov, tak aj dĺžka behu programu narástla zhruba kvadraticky a beh trval teraz už niekoľko hodín. Výsledok bol že aj takto zosilnená verzia hypotézy stále platí pre všetky otestované grafy.

Výsledok ktorý sa nám teda podarilo dosiahnuť je, že sme overili platnosť základnej aj zosilnenej verzie Frončekovej hypotézy pre všetky kubické grafy do 36 vrcholov, ktoré nemajú mosty, trojuholníky a netriviálne trojrezy.