

LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA

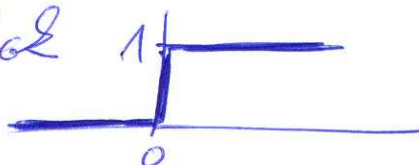
1.

Fourierova transformácia

$$f(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Pôlroviť funkcie (map):

jednoduchý skok



$$f(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_0^{\infty} =$$

$$= \left[\underset{\uparrow}{\frac{e^{-j\infty}}{-j\omega}} + \frac{e^{-j\omega \cdot 0}}{-j\omega} \right]$$

problém - nekonverguje, nemá limitu!!

LAPLACE

$$j\omega \rightarrow \boxed{+s + j\omega}$$

aby sa pridalo e^{-st}

$$f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} e^{-j\omega t} dt$$

keďže všetky funkcie konvergujú po pridaní e^{-st}

jednoduchý skok

$$f(p) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-p \cdot t} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

ako by to vyzeralo v F.T.? Obozre:

$$f(j\omega) = \lim_{s \rightarrow 0} f(p) = f(j\omega)$$

R, L, C v L.T.:

$$R : Z_R = R$$

$$L : Z_L = pL$$

$$C : Z_C = \frac{1}{pC}$$

Laplaceove obraty niektorých funkcií

1. jednotkový skok: $\frac{1}{p}$

2. δ -funkcia: δ

$$f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = e^{-p \cdot 0} = \underline{\underline{1}} \quad (\text{konštanta})$$

3. ak $g(t) = \frac{d}{dt} f(t)$

$$\underline{\underline{g(p) = p f(p)}}$$

4. ak $g(t) = \int f(t) dt$

$$\underline{\underline{g(p) = \frac{1}{p} f(p)}}$$

Ďalšia cesta k obratom L.T.:

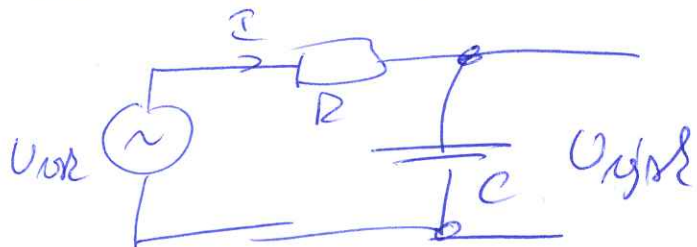
1. zberaj vracov (slovné L.T.)

2. Softvér (MATHEMATICA, MATH-CAD, ...)

LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA

3.

PRECHOD diferenciálnych rovníc na algebraické



$$\frac{\tilde{U}_{vys}}{\tilde{U}_{vst}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + pRC}$$

dlaž
↓

$$\boxed{\tilde{U}_{vys}(1 + pRC) = \tilde{U}_{vst}}$$

$$\boxed{U_{vys}(t) + RC \frac{d}{dt} U_{vys}(t) = U_{vst}(t)}$$

Kedykoľvek a takto možno diferenciálnu rovnicu v časovej prepísat do algebraickej v p a späť.

~~Uvažujme~~

zdanlivá neujhoda používania $\tilde{U} e^{j\omega t} \rightarrow$
vieme výstupné napätie iba pre sinusové
vstupné napätie.

LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA

4.

Čo robíme, ak ~~deklarujeme~~ máme porušenú $U_{\text{vst}}(t)$ a chceme porušeť $U_{\text{výst}}(t)$ a nedeľme počítač-diferenciálne rovnice?

1. $U_{\text{vst}}(t) \xrightarrow{\text{L.T.}} U_{\text{vst}}(p)$

2. nájsť $K(p) = \frac{U_{\text{výst}}(p)}{U_{\text{vst}}(p)}$ (krit. zákony, alg. rovnice)

3. $U_{\text{výst}}(p) = K(p) \cdot U_{\text{vst}}(p)$

4. $U_{\text{výst}}(p) \xrightarrow{\text{Inv. L.T.}} U_{\text{výst}}(t)$

Veľmi podobne pomocou vstupu SW, napríklad uvažuj v MATLAB-SADe

Medalo by sa to aj ~~počítanie~~ ^{počítanie $K(p)$ z krit. zákonov?}

Dalo, musíme iba porušeť $K(p)$ alebo ~~effo~~ siho draz v časovej oblasti $K(t)$. Pa' sa priamo poverat!!

$$U_{\text{výst}}(p) = K(p) \cdot U_{\text{vst}}(p)$$

ak robíme

$$U_{\text{vst}}(t) = \delta(t) \quad - \text{delta funkcia}$$

LAPLACEOUT TRANSFORMÁCIA

5.

$$U_{jR}(P) = K(P) \cdot 1 \leftarrow \text{obraz } \delta(t)$$

$$U_{jR}(P) = K(P), \text{ t.j.}$$

$$U_{jR}(t) = K(t)$$

Cieľ: ak máme privedieme $\delta(t)$,
časový priebeh výstupného napätia
(rovnaké sa označuje $h(t)$) je vlastne
obrazom $K(P)$, t.j.

$$\boxed{K(P) = \text{Laplaceov obraz } h(t)}$$

Vyrobáť časový priebeh napätia v koore
della - funkcie je veľmi komplikované.
Omnoho ľahšie je vyrobiť jednoduchý skok,
napr. vypínačom.

$$U_{jR}(P) = K(P) \cdot \frac{1}{P} \leftarrow \text{obraz jednoduchého skoku}$$

$$U_{jR}(P) = \frac{1}{P} K(P), \text{ t.j.}$$

$$U_{jR}(t) = \int_{-\infty}^t K(\tau) d\tau, \text{ alebo}$$

$$K(t) = \frac{d}{dt} U_{jR}(t)$$

Cieľ: ak ponáme odovz systém na
jednoduchý vchod (obvykle sa označuje $H(s)$),
potom

$$K(p) = \text{Laplaceov obraz } \frac{d}{ds} H(s)$$

poznámka: poznato dobrý pokus p .

$$K(p) = \frac{\text{Laplaceov obraz } H(s) \cdot p}{\text{---}}$$

Záver: ak chceme vypočítať odovz
lineárneho systému na vstupné napätie
nemusíme $K(p)$ teoreticky najprv vypočítať!
môžeme priamo $h(s)$ resp $H(s)$ a pomocou
pomocou L.T. nájsť $K(p)$.

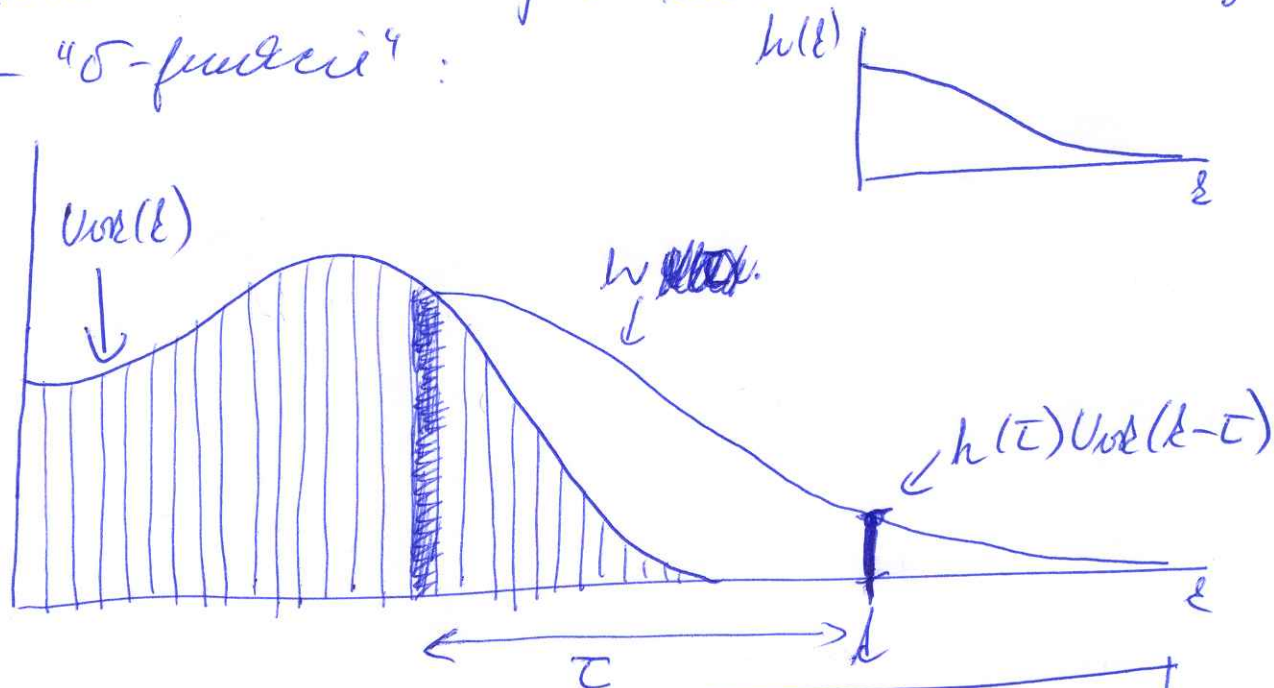
otázka: ~~Možno~~ ak už ponáme $h(s)$ alebo
 $H(s)$ a ľahšie $U_{in}(s)$, nedalo by
sa nájsť $U_{out}(s)$ bez L.T.?

odpoveď: dalo - subanalýzou integráciou.

LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA 7.

Duhamelov integrál

ak poznáme $U_{\text{vst}}(t)$ a odovet systému na $\delta(t)$ (t.j. $h(t)$), potom $U_{\text{vst}}(t)$ môžeme "nahráť" na číselné obdeláky - "δ-funkcie":



$$U_{\text{vst}}(t) = \int_0^{\infty} U_{\text{vst}}(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

Duhamelov integrál, proces integrácie sa nazýva konvolúcia

ak poznáme $H(s)$ namiesto $h(t)$:

$$U_{\text{vst}}(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} U_{\text{vst}}(t-\tau) H(\tau) d\tau$$

ak to konverguje! Občas nie, keď sa najprv spočítajú $h(t) = \frac{d}{ds} H(s)$

LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA

8.

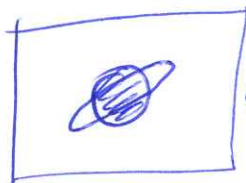
Záver: ak poznáme odovet systému $x(t)$,
napríklad meraním a poznáme $U_{in}(t)$,
možno nájsť $U_{out}(t)$ aj priamo prika-
mlovaním integrálom (konvolúciou), bez
nutnosti použiť Laplaceovu transformáciu.

Konvolúcia

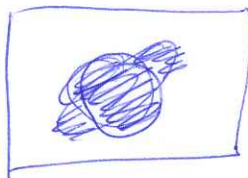
Opäťná úloha: poznáme $U_{in}(t)$
a $h(t)$, chceme poznať $U_{out}(t)$.

Príklad: fotky z Hubbleovho teleskopu:
odovet na δ -funkciu = fotografia bodu (kvarzy)

δ -funkcia $\rightarrow$  h - difrakčné kmity + šum
optiky



"ostrá", dekon-
volovaná
fotografia.



"rozmazaná" fotogra-
fia
slybou optiky

ako na to?

LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA

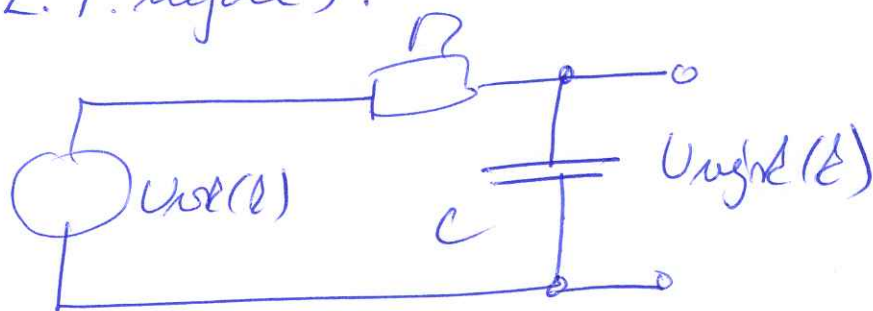
9.

Postup pri dekonvolúcii:

1. Zmerať $g(t)$
2. $g(t) \xrightarrow{\text{L.T.}} h(p) = K(p)$
3. Zmerať $U_{\text{výst}}(t)$
4. $U_{\text{výst}}(t) \xrightarrow{\text{L.T.}} U_{\text{výst}}(p)$
5. $\frac{U_{\text{výst}}(p)}{U_{\text{vst}}(p)} = K(p), \text{ d-j.}$
$$U_{\text{vst}}(p) = \frac{U_{\text{výst}}(p)}{K(p)}$$
6. $U_{\text{vst}}(p) \xrightarrow{\text{Inv. L.T.}} U_{\text{vst}}(t)$

Pozor: nikdy nie je pri dekonvolúcii nutné ani robiť L.T. (vo všeobecni to však bez L.T. nejde).

Príklad:



ak poznáme $U_{\text{výst}}(t)$ a máme, že

$$K(p) = \frac{1}{1 + \cancel{RC} pRC} \quad \text{! potom}$$

$$\frac{U_{\text{výst}}(p)}{U_{\text{vst}}(p)} = \frac{1}{1 + pRC}$$

LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA

10.

$$U_{\text{výst}}(P) (1 + PRC) = U_{\text{vst}}(P) \quad , \text{ t.j.}$$

$$\boxed{U_{\text{vst}}(t) = U_{\text{výst}}(t) + \cancel{U_{\text{výst}}(t)} PRC \frac{d}{dt} U_{\text{výst}}(t)}$$

Čiže:

až považáme $U_{\text{výst}}(t)$, sločí' z nemu
pripočítat deriváciu $\frac{dU_{\text{výst}}}{dt}$ s koeficientom
RC a máme $U_{\text{vst}}(t)$. a to bez žiadnej
L.T. ! Vo všeobecnosti to vždy nejde.

napríklad:

$$K(P) = \frac{1 + PRC}{1 + 2PRC}$$

$$U_{\text{výst}}(P) = K(P) U_{\text{vst}}(P)$$

$$U_{\text{vst}}(P) = \frac{U_{\text{výst}}(P)}{K(P)} = \frac{1 + 2PRC}{1 + PRC} U_{\text{výst}}(P)$$

$$(1 + PRC) U_{\text{vst}}(P) = (1 + 2PRC) U_{\text{výst}}(P) \quad , \text{ t.j.}$$

$$\underbrace{U_{\text{vst}}(t) + PRC \frac{d}{dt} U_{\text{vst}}(t)}_{\text{diferenciálna rovnica !!!}} = \underbrace{U_{\text{výst}}(t) + 2PRC \frac{d}{dt} U_{\text{výst}}(t)}_{\text{Zmnoženie}}$$