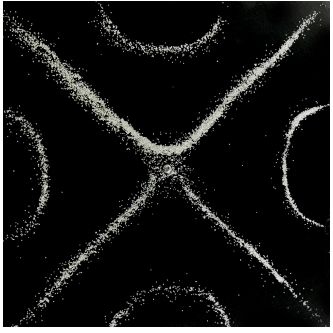
Vizualizácia Chladniho obrazcov pomocou GLSL

Bc. Marek Lošonský

Október 2026

Čo sú Chladniho obrazce?

- kmitajúca doska má charakteristické **vlastné tvary kmitania**
- **uzlové čiary**: oblasti s nulovou alebo veľmi malou amplitúdou kmitania
- piesok sa presúva smerom k uzlovým oblastiam
- obrazec závisí od budiacej frekvencie a podmienok uloženia dosky



Membrána

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 w$$

Tenká doska – rozhoduje ohybová tuhosť D

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Veličiny:

w – priečna výchylka
x, y – priestorové súradnice
t – čas
c – rýchlosť šírenia vlny v membráne
ρ – hustota materiálu
h – hrúbka dosky

Veličiny a operátory:

D – ohybová tuhosť dosky
E – Youngov modul pružnosti
ν – Poissonovo číslo
∇^2 – Laplaceov operátor
∇^4 – biharmonický operátor

Poznatok

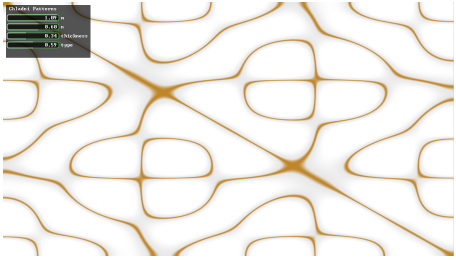
Membrána a doska môžu mať podobné uzlové obrazce, ale odlišné rovnice aj vlastné frekvencie.

Prvý shader: štvorcová membrána

- idealizovaný model so **kosínusovými** modálnymi funkciami
- kombinácia dvoch tvarov so zamenenými indexmi m, n
- nulová normálová derivácia na okraji (nie pevne uchytený okraj)
- priame vykreslenie miest, kde $|W| \approx 0$; bez častíc

$$W(x, y) = A\cos(m\pi x)\cos(n\pi y) + B\cos(n\pi x)\cos(m\pi y)$$

$x, y \in [0, 1]$ – normalizované súradnice; m, n – modálne indexy; A, B – váhy

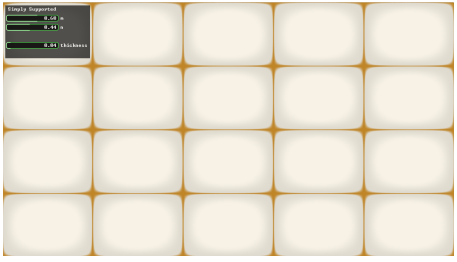


Druhý shader: jednoducho podopretá obdĺžniková doska

- Kirchhoffova–Loveova teória tenkých dosiek
- všetky štyri okraje **jednoducho podopreté**
- analytické tvary: súčin sínusových funkcií
- indexy m, n nastavujú posuvníky; piesok sa nepohybuje

$$W_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{(m+1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\pi y}{b}\right)$$

a, b – rozmery dosky; $m, n = 0, 1, \ldots$ – indexy v kóde.

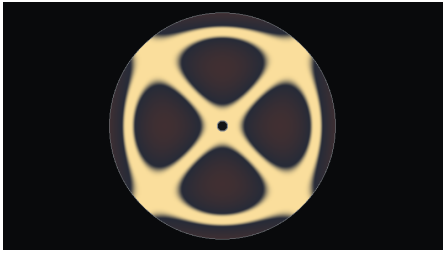


Nový prototyp: kruhová hliníková doska

- hliníková doska: **priemer 20 cm**, **hrúbka 2 mm**
- experiment: **stredová skrutka cca 1 cm**, voľný vonkajší okraj
- výpočtový model: **ideálna voľná kruhová doska**; uchytenie zatiaľ neovplyvňuje vlastné tvary

$$\Phi_{n,s}(r,\theta) = \left[J_n(\lambda_{n,s} r) + C I_n(\lambda_{n,s} r)\right] \cos(n\theta)$$

$r \in [0,1]$ – normalizovaný polomer; n – počet uzlových priemerov



ukážka diagnostiky vlastného tvaru

Vlastné frekvencie a výber módu

1. vlastné hodnoty $\lambda_{n,s}$ určujú frekvencie:

$$f_{n,s} \approx 48{,}62\,\lambda_{n,s}^2 \quad [\mathrm{Hz}]$$

2. tlmená odozva **porovná dostupné módy** a vyberie jeden s najvyšším skóre
3. viditeľnosť poľa klesá pri odchýlke od rezonancie:
   - do 0,5 %: plná intenzita
   - od 2 %: bez nového uzlového poľa

Príklad ovládanej frekvencie

f [Hz]	reakcia modelu
995	priemer + kružnica
1030	bez aktívneho obrazca
1062	štyri priemery

Architektúra aktuálneho riešenia v ShaderToy

1. Buffer B – matematické pole

- vyberie **jeden** vlastný mód a vypočíta jeho intenzitu:

$$E = \frac{\Phi^2}{1 + \Phi^2}$$

2. Buffer A – simulácia piesku

- $64 \times 64 = 4096$ virtuálnych zŕn
- každý pixel ukladá **RG**: polohu, **BA**: rýchlosť
- číta **Buffer B** a predchádzajúci stav seba samého (spätná väzba)
- aktualizuje pohyb zŕn v čase

3. Image – zobrazenie

- vykreslí dosku, stredový čap a zrnká zo stavov Buffer A; umožňuje tiež prepnúť **diagnostické zobrazenie vibračného poľa** z Buffer B

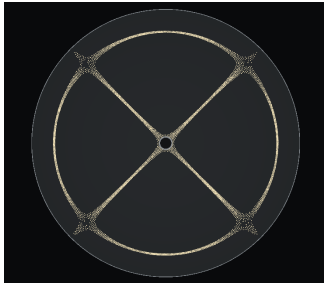
Dáta: Buffer B $\longrightarrow$ Buffer A (so spätnou väzbou) $\longrightarrow$ Image

Nový pokrok: dynamika zŕn piesku

- pohyb do oblastí menšej intenzity:

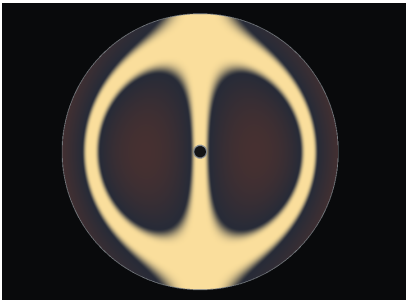
$$\mathbf{a}_{\text{uzly}} = -k \nabla E$$

- **tlmenie** spomaľuje pohyb; **odpudzovanie** bráni hromadeniu do jediného bodu



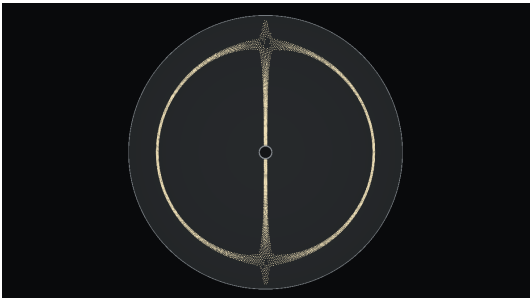
ukážka formovania obrazca zo zŕn

Aktuálne výsledky: uzlové oblasti a častice



diagnostika pri 995 Hz

uzlový priemer a kružnica; zvýraznená je *oblasť nízkej intenzity*



pohybujúce sa zrnká

častice sa postupne sústreďujú v uzlových oblastiach

Overenie a hranice súčasného prototypu

Čo máme podložené

- Kirchhoffova–Loveova teória pre **tenkú hliníkovú dosku**
- besselove funkcie a vlastné tvary **voľnej kruhovej dosky**
- kontrola frekvencií oproti odbornej literatúre a nezávislému výpočtu
- funkčné GPU vykresľovanie a spätná väzba častíc

Čo zatiaľ zjednodušujeme

- zobrazuje sa **jeden mód**, nie superpozícia
- frekvenčné prahy a náhodné impulzy nie sú kalibrované meraním
- pohyb zŕn je "náhodný", nie fyzikálny model

Pokračovanie práce

- doplniť **superpozíciu** viacerých vlastných módov pri jednej budiacej frekvencii
- pridať **interaktívne ovládanie** budiacej frekvencie
- **kalibrácia** tlmenia a náhodných impulzov na základe experimentu
- **vylepšenie vizualizácie**
- **rozšírenie** o geometriu štvorcovej dosky
- **porovnanie** s reálnym experimentom v laboratóriu KVANT

Použitá literatúra a nástroje

- A. W. Leissa, *Vibration of Plates*, NASA SP-160, 1969.
- T. D. Rossing, N. H. Fletcher, *Principles of Vibration and Sound*, 2. vyd., 2004.
- R. Szilard, *Theories and Applications of Plate Analysis*, 2004.
- M. J. Gander, G. Wanner, *From Euler, Ritz, and Galerkin to Modern Computing*, 2012.
- **ShaderToy a GLSL** – vlastná implementácia, GPU simulácia a vizualizácia.