Vizualizácia Chladniho obrazcov

Projektový seminár 1 — Prezentácia progresu

Bc. Marek Lošonský

15. máj 2026

Motivácia

- Chladniho obrazce predstavujú vizualizáciu uzlových čiar na vibrujúcich platniach.
- Vznikajú pri rezonancii tenkých platní rôznych materiálov a tvarov.
- Cieľom práce je štúdium fyzikálneho a matematického pozadia vibrácií platní a vytvorenie realtime shaderovej vizualizácie.

Hlavné ciele práce na letný semester 2026

- štúdium vlastných módov a vlastných frekvencií,
- pochopenie biharmonickej rovnice platne,
- porovnanie membrány a platne,
- implementácia realtime vizualizácie pomocou GLSL shaderov.

Čo sú Chladniho obrazce?

- Piesok sa zhromažďuje pozdĺž uzlových čiar.
- Uzlové čiary sú miesta s nulovou amplitúdou vibrácie.
- Rezonančné frekvencie vytvárajú rôzne módové tvary.

Stojaté vlny a vlastné módy

Vibrujúci systém má prirodzené frekvencie nazývané **vlastné frekvencie**.

Pri týchto frekvenciách systém vibruje v špecifických priestorových tvaroch nazývaných **vlastné módy**.

Posunutie vibrujúcej platne môžeme zapísať:

$$w(x, y, t) = W(x, y)T(t)$$

kde:

- $W(x, y)$ opisuje priestorový módový tvar,
- $T(t)$ opisuje časové kmitanie.

Membrána vs. platňa

Membrána

$$\nabla^2 w$$

- systém založený na ťahu,
- diferenciálna rovnica druhého rádu,
- podobné správaniu bubna.

Tenká platňa

$$\nabla^4 w$$

- systém založený na ohybe,
- diferenciálna rovnica štvrtého rádu,
- riadené ohybovou tuhosťou.

Biharmonická rovnica platne

Pre tenkú Kirchhoff-Loveovu platňu:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\nabla^4 w = 0$$

kde:

- ρ = hustota,
- h = hrúbka platne,
- D = ohybová tuhosť,
- $w(x, y, t)$ = priečne posunutie.

Ohybová tuhosť:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Okrajové podmienky

Rôzne typy okrajov vytvárajú rôzne vlastné módy.

Podmienka	Fyzikálny význam
Simply supported	nulové posunutie
Clamped	nulové posunutie a nulový sklon
Free	nulové momenty a šmykové sily

Okrajové podmienky výrazne ovplyvňujú:

- módové tvary,
- uzlové čiary,
- rezonančné frekvencie.

Pôvodný shader

Pôvodný shader program používal predpis pre štvorcovú membránu s voľnými hranami (Colwell 1933):

$$W(x,y) = A\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + B\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$$

Pozorované vlastnosti:

- vizuálne vytvára Chladniho obrazce,
- explicitne nerieši biharmonickú rovnicu,
- neobsahuje fyzikálne parametre platne,
- pripomína membránové módové štruktúry.

Model jednoducho podopretej platne

Podľa Rossinga a Leissu má jednoducho podopretá obdĺžniková platňa analytické riešenie:

$$W_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{(m+1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\pi y}{b}\right)$$

s vlastnou frekvenciou:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho h}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}$$

Ide o analytické riešenie Kirchhoff-Loveovej rovnice platne.

Implementácia v GLSL

```
#define pi 3.14159265359

float mode(float x, float y, float m, float n, float a, float b)
{
    return sin((m+1)*pi*x/a) * sin((n+1)*pi*y/b);
}
```

Piesok sa zhromažďuje v blízkosti uzlových čiar:

$$W(x, y) \approx 0$$

Aproximácia clamped platne

Pre clamped platne jednoduché sínusové riešenia nestačia.

Príklad Rayleigh/Ritz aproximačnej funkcie:

$$W(x,y) = \left(\cos\frac{2\pi x}{a} - 1\right)\left(\cos\frac{2\pi y}{b} - 1\right)$$

Táto funkcia spĺňa:

$$W = 0$$

aj:

$$\frac{\partial W}{\partial n} = 0$$

na okrajoch.

Aktuálny progres

- štúdium literatúry o vibrujúcich membránach a (hlavne) platniach,
- pochopenie rozdielov medzi membránovým a platňovým modelom,
- implementovanie vizualizácie módov jednoducho podopretej platne (simply supported rectangle plate) v prostredí Shadertoy.

Ďalší plán práce

- štúdium modelov ďalších tvarov platní (circular plate, polygon plate alebo iných - taktiež v závislosti od dostupnosti v laboratóriu KVANT),
- implementácia superpozície módov,
- optimalizácia realtime renderingu,
- porovnanie simulácie s experimentom v laboratóriu KVANTu.

Literatúra

- Robert Cameron Colwell, *Diagonal Symmetry in Vibrating Plates*.
- Thomas D. Rossing, Neville H. Fletcher, *Principles of Vibration and Sound*.
- Arthur W. Leissa, *Vibration of Plates*.

Ďakujem za pozornosť!