Retardácia v newtonovskom probléme dvoch telies (upresnenie zadania bak.práce)

Eduard Masár

Pohybové rovnice s okamžitým pôsobením na diaľku

V newtonovskej gravitácii pôsobia telesá na seba gravitačnou silou, ktorá sa šíri nekonečnou rýchlosťou. Inak povedané, veľkosť gravitačnej sily medzi dvoma pohybujúcimi sa telesami závisí v každom okamihu len od ich aktuálnej vzdialenosti, bez ohľadu na ich relatívnu rýchlosť.

Newtonov gravitačný zákon hovorí, že dva hmotné body s polohovými vektormi $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$ a s hmotnosťami m_1 a m_2 sa navzájom priťahujú rovnako veľkou a opačne orientovanou gravitačnou silou s veľkosťou $\frac{Gm_1m_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^2}$. Po dosadení Newtonovho gravitačného zákona do Newtonových pohybových rovníc pre telesá 1 a 2 dostávame sústavu dvoch diferenciálnych rovníc, opisujúcich časovú závislosť polohových vektorov $\boldsymbol{r}_1(t)$ a $\boldsymbol{r}_2(t)$

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\frac{Gm_1m_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^3}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) \tag{1}$$

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -\frac{Gm_2m_1}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^3}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1), \tag{2}$$

kde bodka znamená deriváciu podľa času. V týchto rovniciach sme už museli gravitačnú silu zapísať vo vektorovom tvare, aby sme mohli vyjadriť nielen jej veľkosť, ale aj smer. Rovnica (1) opisuje priťahovanie telesa 1 k telesu 2, rovnica (2) opisuje priťahovanie telesa 2 k telesu 1.

Retardovaný čas

Zdržanie gravitačnej interakcie v dôsledku konečnej rýchlosti jej šírenia sa nazýva *retardácia*. Ak sa gravitačná sila šíri konečnou rýchlosťou, rozdiel oproti nekonečnej rýchlosti jej šírenia sa prejaví, keď sa objekty voči sebe pohybujú. To je aj prípad problému dvoch telies. Na príklade rovnice (1) si ukážeme zmeny, ktoré nastanú v prítomnosti retardácie.

Rovnica (1) opisuje gravitačné pôsobenie telesa 2 na teleso 1. Gravitačná interakcia sa šíri rýchlosťou c od telesa 2 telesu 1. Vektor $\boldsymbol{r}_1$ je poloha telesa 1 v aktuálnom čase t. Vektor $\boldsymbol{r}_2$ je poloha telesa 2 v minulom čase $t' < t$, ktorý sa nazýva *retardovaný čas*. Podmienka na retardovaný čas t' je, že gravitačná interakcia prekoná za čas $t-t'$ vzdialenosť medzi minulou polohou telesa 2 v čase t' a aktuálnou polohou telesa 1 v čase t (rovnica (5) nižšie).

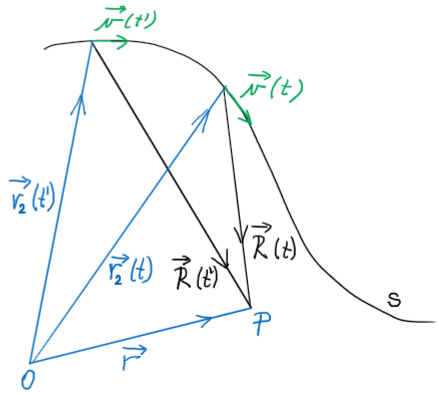

Fig. 1: Relatívne polohy $\boldsymbol{R}(t')$ a $\boldsymbol{R}(t)$ v retardovanom čase t' a v aktuálnom čase t

Nech bod P na obrázku Fig.1 je poloha telesa 1 v čase t. Konštantný vektor $\boldsymbol{r}$ spája počiatok súradnej sústavy O s bodom P. Polohu druhého telesa v aktuálnom čase t a v retardovanom čase t' ukazujú vektory $\boldsymbol{r}_2(t)$ a $\boldsymbol{r}_2(t')$. Pre vektory $\boldsymbol{R}(t)$ a $\boldsymbol{R}(t')$, spájajúce teleso 2 v čase t a v čase t' s bodom P platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}(t) &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2(t) && (3) \\ \boldsymbol{R}(t') &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2(t'), && (4) \end{aligned}$$

a teda vzdialenosti medzi telesom 2 a bodom P v čase t a v čase t' sú $R(t) = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2(t)|$ a $R(t') = \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2(t')\right|$.

Teleso 2 sa pohybuje po dráhe s, pričom poloha a rýchlosť telesa 2 v čase t je daná vektormi $\boldsymbol{r}_2(t)$ a $\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}_2(t)}{dt} = -\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt}$. Zaujíma nás sila, ktorou v čase t teleso 2 pôsobí na teleso 1. Je zrejmé, že táto sila nemôže závisieť od relatívnej polohy $\boldsymbol{R}(t)$, prípadne rýchlosti $\boldsymbol{v}(t)$ telesa 2 voči telesu 1 v čase t, pretože gravitačná interakcia potrebuje istý čas, aby prekonala vzdialenosť od bodu $\boldsymbol{r}_2(t)$ do bodu P. Sila, ktorou teleso 2 pôsobí na teleso 1, je daná polohou $\boldsymbol{R}(t')$ a prípadne aj rýchlosťou $\boldsymbol{v}(t')$ telesa 2 v retardovanom čase t' pre ktorý platí

$$\left(t - t'\right) c = R(t'). \tag{5}$$

Numerické riešenie rovnice (5)

Retardovaný čas t' a vzdialenosť $R(t') = \left|\boldsymbol{R}(t')\right|$ vo všeobecnosti (t.j. pre ľubovoľný pohyb telesa 2) nevieme vypočítať ako presné riešenie rovnice (5). Ak však sústavu pohybových rovníc riešime numericky a pamätáme si vypočítané polohy telesa 2 v minulom čase, vieme si poradiť. Numericky vieme $\boldsymbol{R}(t')$ a $R(t')$ nájsť s presnosťou zodpovedajúcou presnosti vypočítaných polôh tak, že postupujeme od času t späť do minulosti a hľadáme polohu $\boldsymbol{r}_2(t')$ telesa 2 v takom čase $t' < t$, v ktorom sa vzdialenosť $R(t') = \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2(t')\right|$ čo najpresnejšie rovná číslu $\left(t - t'\right) c$.

Nevýhodou numerického riešenia rovnice (5) takouto metódou je spomalenie výpočtov, lebo ho treba robiť v každom výpočtovom kroku (v ktorom sa posunieme z času t do času $t + \triangle t$). Ideálne by bolo poznať analytické riešenie pre $\boldsymbol{R}(t')$, resp. $R(t')$ vyjadrené prostredníctvom aktuálnych hodnôt $\boldsymbol{R}(t)$, resp. $R(t)$. Toto vieme vo všeobecnosti urobiť len s približnou presnosťou[1].

Polohy a rýchlosti v retardovanom čase s presnosťou do $\frac{v}{c}$

Ak chceme približne vyjadriť polohu a rýchlosť telesa 2 v retardovanom čase t' prostredníctvom jeho polohy, rýchlosti a zrýchlenia v čase t, môžeme to urobiť rozkladom funkcií $\boldsymbol{R}(t') = \boldsymbol{R}\left(t - \frac{R(t')}{c}\right)$, $R(t') = R\left(t - \frac{R(t')}{c}\right)$, $\boldsymbol{v}(t') = \boldsymbol{v}\left(t - \frac{R(t')}{c}\right)$ do radu v čase t. S presnosťou do $\frac{v}{c}$ tak dostaneme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}(t') &\approx \boldsymbol{R} + R\frac{\boldsymbol{v}}{c} && (6) \\ R(t') &\approx R + \frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{c} && (7) \\ \boldsymbol{v}(t') &\approx \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{a}}{c}R, && (8) \end{aligned}$$

kde sme použili označenie

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t), \quad R = R(t), \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}_2(t)}{dt}, \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}. \tag{9}$$

[1] $\boldsymbol{R}(t')$, resp. $R(t')$ je možné vyjadriť *presne* prostredníctvom aktuálnych hodnôt $\boldsymbol{R}(t)$ resp. $R(t)$ len v prípade konštantnej rýchlosti $v = const$, čo v našom prípade úlohy dvoch telies nepripadá do úvahy.

Vzťahy (6)-(8) sú aproximácie smerom do minulosti, keď z veličín v aktuálnom čase t približne vypočítame veličiny v čase $t' < t$. S malým časovým krokom môžu byť tieto priblíženia uspokojivo presné pre naše potreby. Výhodou je, že si nemusíme pamätať minulé polohy (prípadne aj rýchlosti) telesa 2. Ak potrebujeme presnejší výpočet, potom treba veličiny v retardovaných časoch hľadať numerickým riešením rovnice (5) prehľadávaním starých polôh telesa 2 ako bolo opísané vyššie.

Retardácia v newtonovskej gravitácii

Je viacej spôsobov, ako môžeme pridať retardáciu do Newtonovho gravitačného zákona. Obmedzíme sa na dva najjednoduchšie, ktorými zostávame v nerelativistickej oblasti rozsahov rýchlostí telies.

Spôsob 1

Označme $\boldsymbol{F}_{21}(\boldsymbol{r},t)$ silu, ktorou teleso 2 pôsobí na teleso 1 v mieste $\boldsymbol{r}$ v čase t tak ako na Fig.1. Newton samotný by zrejme retardáciu do gravitačnej sily $\boldsymbol{F}_{21}(\boldsymbol{r},t)$ pridal takto

$$\boldsymbol{F}_{21}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{Gm_1m_2}{R^3(t')}\boldsymbol{R}(t'), \tag{10}$$

kde $R(t') = \left|\boldsymbol{R}(t')\right|$ a vektor $\boldsymbol{R}(t')$ je definovaný vzťahom (4). V probléme dvoch telies s retardáciou treba nahradiť pravú stranu rovnice (1) silou $\boldsymbol{F}_{21}(\boldsymbol{r},t)$. Veličiny $\boldsymbol{R}(t')$ a $R(t')$ získame buď numerickým riešením rovnice (5), alebo z približných vzťahov (6)-(7) .

Analogicky vypočítame silu $\boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{r},t)$, ktorou teleso 1 pôsobí na teleso 2 v mieste $\boldsymbol{r}$ v čase t. Pritom vo všetkých vzťahoch aj v texte vyššie zameníme $1 \longleftrightarrow 2$. Silou $\boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{r},t)$ potom nahradíme pravú stranu rovnice (2).

Spôsob 2

Inou jednoduchou možnosťou je pridanie retardácie do newtonovského gravitačného potenciálu telesa 2

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = -\frac{Gm_2}{R(t')}, \tag{11}$$

odkiaľ pre gravitačnú silu $\boldsymbol{F}_{21}$, ktorou teleso 2 pôsobí na teleso 1 dostávame

$$\boldsymbol{F}_{21}(\boldsymbol{r},t) = -m_1\nabla\varphi(\boldsymbol{r},t) = -\frac{Gm_1m_2}{R^3(t')}\frac{\boldsymbol{R}(t')}{1-\dfrac{\boldsymbol{R}(t')}{R(t')}\cdot\frac{\boldsymbol{v}(t')}{c}}, \tag{12}$$

kde $\boldsymbol{v}(t') = \left.\frac{d\boldsymbol{r}_2(t)}{dt}\right|_{t=t'}$. Ďalší postup je rovnaký ako bolo vysvetlené v spôsobe 1.

Poznámka V rámci newtonovskej gravitácie je rýchlosť telies malá voči rýchlosti svetla $\frac{v}{c} \ll 1$. Ak pre retardované veličiny používame približné vzťahy (6)-(7), tak pre $\frac{\boldsymbol{v}(t')}{c}$ v (12) máme

$$\frac{\boldsymbol{v}(t')}{c} \approx \frac{\boldsymbol{v}}{c} - \frac{\boldsymbol{a}}{c^2}R \approx \frac{\boldsymbol{v}}{c}, \tag{13}$$

lebo člen s $\frac{1}{c^2}$ môžeme zanedbať voči $\frac{\boldsymbol{v}}{c}$. V približnom výpočte teda v (12) môžeme namiesto $\frac{\boldsymbol{v}(t')}{c}$ použiť $\frac{\boldsymbol{v}(t)}{c}$.

Rýchlosť šírenia gravitácie

Pretože retardáciu pridávame do newtonovskej gravitácie, rýchlosť telies v musí byť malá voči rýchlosti svetla c, t.j. musí platiť $\frac{v}{c} \ll 1$. V rovnici pre retardáciu (5) sme ako rýchlosť šírenia gravitácie použili tiež rýchlosť svetla c. Rýchlosť šírenia gravitácie je teda veľká voči rýchlosti telies, čím sa efekt retardácie len málo odlišuje od štandardnej newtonovskej gravitácie, v ktorej je rýchlosť šírenia gravitácie nekonečne veľká.

Aby sme lepšie uvideli vplyv retardácie, môžeme v tomto modeli experimentovať s veľkosťou rýchlosti šírenia gravitácie c_g, ktorá môže byť aj menšia ako rýchlosť svetla. Ak vo vzťahoch pre retardované veličiny namiesto c použijeme c_g, kde napr. $c_g = \frac{c}{2}$ alebo $c_g = \frac{c}{10}$, atď, lepšie uvidíme zmeny, ktoré do problému dvoch telies prináša retardácia.

Astronomické jednotky

Aby sme v našich numerických výpočtoch udržali presnosť v rámci rozsahu mantisy štandardného reálneho dátového typu s dvojitou presnosťou ($15-16$ desiatkových cifier), výpočty by mali pracovať s číslami, ktorých veľkosť zostáva blízko číslu jedna (10^0). Pre problém dvoch telies s parametrami ako sa vyskytujú v našej Slnečnej sústave je preto prirodzené počítať v astronomických jednotkách, v ktorých je jednotkou *dĺžky* astronomická dĺžková jednotka (au), t.j. stredná vzdialenosť Zeme od Slnka, jednotkou *času* je jeden deň (d) a jednotkou *hmotnosti* je hmotnosť Slnka ($M_\odot$). Pre rýchlosť svetla c a gravitačnú konštantu G v týchto jednotkách platí

$$c = 173.1446327 \frac{au}{d} \tag{14}$$

$$G = 2.9591 \times 10^{-4} \frac{au^3}{M_\odot d^2}. \tag{15}$$

Automaticky potom dostávame vzdialenosti v au a časy v d. Pre presnosť výpočtov je výhodné, že gravitačná konštanta v astronomických jednotkách má veľkosť rádu 10^{-4}, ktorá je o 7 rádov bližšia k 10^0 oproti jej hodnote v sústave SI.

Hmotnosti telies zadávame v jednotkách hmotnosti Slnka $M_\odot$. Napríklad hmotnosť sústavy Zem+Mesiac v týchto jednotkách je[2]

$$M_{♁☽} = 3.04043263333 \times 10^{-6} M_\odot. \tag{16}$$

Hmotnosť samotnej Zeme

$$M_{♁} = 3.00348959632 \times 10^{-6} M_\odot \tag{17}$$

a samotného Mesiaca

$$M_{☽} = 1.23000383 \times 10^{-2} M_{♁} = 3.69430371 \times 10^{-8} M_\odot. \tag{18}$$

Stredná rýchlosť obehu Zeme okolo Slnka je

$$v_{♁} = 0.01720209895 \frac{au}{d}, \tag{19}$$

a teda obežná doba (za predpokladu presne kruhovej dráhy) je

$$T = \frac{2\pi(1au)}{v_{♁}} = 365.2568983d.$$

[2] pozreté 30.4.2021: https://en.wikipedia.org/wiki/Planetary_mass