OPTIKA

obsah prednášok EMO

Peter Markoš

FMFI UK, zimný semester 2020/2021

Obsah

Úvod

Predkladaný text je stručný súhrn prednášok optiky v rámci kurzu EMO (ElektroMagnetizmus a Optika) na FMFI UK. Nemá ambíciu nahradiť odporúčané učebnice, skôr pomôcť študentom pri orientácii v preberanej látke. Text sleduje prednášky, na niektorých miestach rozširuje a dopĺňa preberanú látku. Ku každej kapitole je uvedená literatúra, kde sa o nej dá prečítať viac.

V závere je zoznam literatúry, určite po nej siahnite. Hoci sa pre úspešné absolvovanie skúšky **nemusíte učiť nič, čo neodznelo na prednáškach**, texty v knihách vám poskytnú viac informácií v kompaktnejšej forme. Zoznam nie je úplný, ľahko nájdete aj inú vhodnú literatúru, slovenskú, anglickú, alebo v inom jazyku, ktorý ovládate. Neváhajte po nich siahnuť. Mnohé fakty – aj pekné obrázky a videá – nájdete na internete.

Na skúške vystačíte s knihou P. Malého [3], z nej preberieme kapitoly 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 13 a 14. V niektorých častiach nepôjdeme do podrobností, ktoré Malý uvádza (napr. matematický opis Fresnelovej difrakcie). Kapitoly 6 a 7 tohto textu korešpondujú s kapitolami Elektromagnetické žiarenie a Radiačný útlm (Feynman). Z Feynmana je užitočné (nie nutné) prečítať si aj ďalšie kapitoly 26 – 33 (v českom vydaní, 1. diel) – od kapitoly Optika: princíp najkratšieho času po kapitolu Radiačný útlm.

Ako doplnenie môžete použiť učebnicu [8] s množstvom príkladov, resp. knihy [4,6]. Zbierka [7] je zdrojom príkladov, podobne ako učebnica [8]. Všetky ostatné tituly sú uvedené len pre prípad, že sa vo veci chcete ďalej vzdelávať.

KAPITOLA 1

Elektromagnetické vlny vo vákuu

Literatúra: [1, 6], [3], kap. 1,2 [4], kap. 2 [6]

1.1 Maxwellove rovnice

1. **Základné veličiny**
   Kompletná informácia o elektromagnetickom poli je daná Maxwellovými rovnicami pre štyri vektorové veličiny:

   - Intenzitu elektrického poľa $\vec{E}(\vec{r},t)$
   - Indukciu elektrického poľa $\vec{D}(\vec{r},t)$
   - Intenzitu magnetického poľa $\vec{H}(\vec{r},t)$
   - Indukciu magnetického poľa $\vec{B}(\vec{r},t)$

   Všetky štyri sú vektormi a sú funkciami polohy a času.

2. Z elektromagnetizmu poznáme fyzikálny význam jednotlivých veličín a ich fyzikálne jednotky:

$$[E] = \text{V/m} = \text{N/C} \qquad [D] = \text{C/m}^2 \qquad [H] = \text{A/m} \qquad [B] = \text{T} \tag{1.1}$$

   Pri všetkých veličinách potrebujeme vedieť nielen ich fyzikálny význam, ale aj ich jednotku v sústave SI

3. **Maxwellove rovnice** v diferenciálnom tvare

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho, \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{1.2}$$

kde ρ je hustota voľného náboja.

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{1.3}$$

s hustotou voľných prúdov $\vec{j}$.

4. **Zdroje elektromagnetického poľa**
voľné náboje s hustotou $\rho(\vec{r}, t)$ a voľné prúdy s hustotou $\vec{j}(\vec{r}, t)$.

$$[\rho] = \text{C/m}^3, \qquad [\vec{j}] = \text{A/m}^2 \tag{1.4}$$

Riešenie Maxwellových rovníc s voľnými nábojmi a prúdmi odvodíme neskôr, teraz sa budeme venovať riešeniu vo vákuu.

5. **Maxwellove rovnice vo vákuu**
Vo vákuu sa Maxwellove rovnice zjednodušia, pretože platia lineárne vzťahy medzi $\vec{D}$ a $\vec{E}$ a medzi $\vec{B}$ a $\vec{H}$:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \tag{1.5}$$

V týchto rovniciach vystupujú dve základné fyzikálne konštanty: Permitivita vákua:

$$\epsilon_0 \approx 8,854 \times 10^{-12} \text{Nm}^2/\text{C}^2 \tag{1.6}$$

a permeabilita vákua.

$$\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \tag{1.7}$$

V sústave SI **boli** tieto hodnoty do 20. mája 2019 presné.[1]

6. **Maxwellove rovnice bez zdrojov**
Vo vákuu nemáme ani voľné náboje, ani voľné prúdy, preto

$$\rho \equiv 0, \qquad \vec{j} \equiv 0 \tag{1.8}$$

takže Maxwellove rovnice sa zjednodušia:

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0, \qquad \mathrm{div}\vec{H} = 0 \tag{1.9}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \qquad \mathrm{rot}\vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.10}$$

Dostali sme štyri homogénne diferenciálne rovnice pre dve vektorové veličiny – intenzitu elektrického a magnetického poľa.

[1] V súčasnosti sú ako presné hodnoty definované: rýchlosť svetla c, elektrický náboj e, Planckova a Boltzmannova konštanta h a k_B a Avogadrova konštantná N_A.

7. **Princíp superpozície**
   Maxwellove rovnice (1.9,1.10) sú homogénne lineárne rovnice. Preto, ak máme dve riešenia, $\vec{E}_1$ a $\vec{E}_2$, potom aj ich lineárna kombinácia

$$\vec{E} = \alpha_1 \vec{E}_1 + \alpha_2 \vec{E}_2 \tag{1.11}$$

   je riešením. (α_1 a α_2 sú ľubovoľné komplexné čísla).

1.2 Vlnová rovnica

1. **Odvodenie vlnovej rovnice**
   Aplikujme na Maxwellovu rovnicu rovnicu

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \tag{1.12}$$

   operátor rotácie:

$$\mathrm{rot}\left[\mathrm{rot}\vec{E}\right] = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{H} = -\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{1.13}$$

   Ľavú stranu vieme upraviť:

$$\mathrm{rot}\left[\mathrm{rot}\vec{E}\right] = \mathrm{grad}\left[\mathrm{div}\vec{E}\right] - \Delta\vec{E} \tag{1.14}$$

   ale div $\vec{E} = 0$, takže dostaneme vlnovú rovnicu

$$\Delta\vec{E} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{1.15}$$

2. **Rýchlosť svetla**
   Z rovnice (1.15) vyplýva, že elektromagnetické vlny sa šíria vo vákuu rýchlosťou

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 299\ 792\ 458 \text{ m/s} \qquad \text{(presne)} \tag{1.16}$$

   Vzťah (1.16) medzi permitivitou, permeabilitou a rýchlosťou svetla poukazuje na súvis elektromagnetizmu s optikou. Rýchlosť svetla je jednou z fundamentálnych fyzikálnych konštánt. Pôvodne bola definovaná len v optike, neskôr sa ukázala byť dôležitá v elektromagnetizme, v 20. storočí sa stala základnou konštantou teórie relativity. Jej hodnota je definovaná, Jeden meter ako jednotka vzdialenosti je v sústave SI definovaný ako vzdialenosť, ktorú svetlo prejde za čas $\tau = 1/299792458$ s.

   Meranie rýchlosti svetla pozri časť 8.1.

3. **Riešenie vlnovej rovnice**
Riešenie vlnovej rovnice môžeme písať v tvare

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{f}(t - \vec{r}\cdot\vec{s}/c) \tag{1.17}$$

alebo

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{g}(t + \vec{r}\cdot\vec{s}/c) \tag{1.18}$$

kde $f(\xi)$ a $g(\xi)$ sú ľubovoľné funkcie. $\vec{E}$ teda nie je funkciou dvoch premenných – času a polohy – ale len jednej premennej:

$$t - \vec{r}\cdot\vec{s}/c \qquad \text{alebo} \qquad t + \vec{r}\cdot\vec{s}/c \tag{1.19}$$

Smer šírenia je daný jednotkovým vektorom $\vec{s}$:

vlna $\vec{f}(t - \vec{r}\cdot\vec{s}/c)$ sa šíri v smere $+\vec{s}$
vlna $\vec{g}(t + \vec{r}\cdot\vec{s}/c)$ sa šíri v smere $-\vec{s}$

Riešením vlnovej rovnice sú teda vlny, šíriace sa priestorom rýchlosťou c.

4. **Rovinná vlna**
Najjednoduchším riešením vlnovej rovnice je rovinná vlna:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi]} \tag{1.20}$$

Rovinná vlna (1.20) je funkciou jediného parametra, v súlade s rovnicou (1.18), pretože

$$\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = \omega[\, t - \vec{s}\cdot\vec{r}/c] \tag{1.21}$$

Vektor $\vec{k}$ definujeme vzťahom

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{s} \tag{1.22}$$

Amplitúda $\vec{E}_0$ nezávisí od polohy ani od času; vhodnou voľbou konštanty ϕ je možné docieliť, aby amplitúda bola reálna. Intenzita elektrického poľa $\vec{E}$ osciluje v smere danom orientáciou vektora $\vec{k}$. Napríklad ak $\vec{k} = (k_x, 0, 0)$, tak

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i[k_x x - \omega t + \phi]} \tag{1.23}$$

a intenzita $\vec{E}$ nezávisí od y ani od z, je teda konštantná v rovine kolmej na $\vec{k}$.

5. Vlnovú rovnicu (1.15) môžeme odvodiť aj pre vektor $\vec{H}(\vec{r},t)$. intenzitu magnetického poľa teda môžeme tiež vyjadriť v tvare

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_H]} \tag{1.24}$$

6. **Parametre rovinnej vlny**

   - Uhlová frekvencia ω
   - Vlnový vektor $\vec{k}$: Absolútna hodnota: $k = |\vec{k}|$, $[k] = \mathrm{m}^{-1}$.
   - Smer šírenia rovinnej vlny je daný jednotkovým vektorom $\vec{s} = \vec{k}/k$
   - Fáza ϕ súvisí s počiatkom odčítania času alebo polohy.

   Iné často používané veličiny:

   - frekvencia $f = \omega/2\pi$, $[f] = \mathrm{s}^{-1}$
   - perióda $T = 1/f$
   - vlnová dĺžka $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

   NIektoré vzťahy medzi jednotlivými parametrami platia pre všetky vlny. Napríklad

   $$\lambda = cT = c/f \tag{1.25}$$

7. **Disperzný vzťah**
   Vzťah medzi vlnovým vektorom a frekvenciou. V prípade vlny vo vákuu je jednoduchý

   $$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{1.26}$$

   Ako vyplýva po dosadení vyjadrenia (1.20) do vlnovej rovnice. V priestore vlnového vektora s osami k_x, k_y, k_z môžeme zostrojiť množinu bodov, s rovnakými hodnotami frekvencie ω - v tomto prípade dostaneme guľu s polomerom

   $$k \ = \omega/c \tag{1.27}$$

   Pre danú frekvenciu ω teda existujú rovinné vlny s tou istou hodnotou k ale šíriace sa v trojrozmerným priestorom rôznymi smermi. pretože priestor je izotrópny, všetky smery sú rovnocenné.
   V materiálovom a/alebo v anizotropnom prostredí bude disperzný vzťah komplikovanejší.

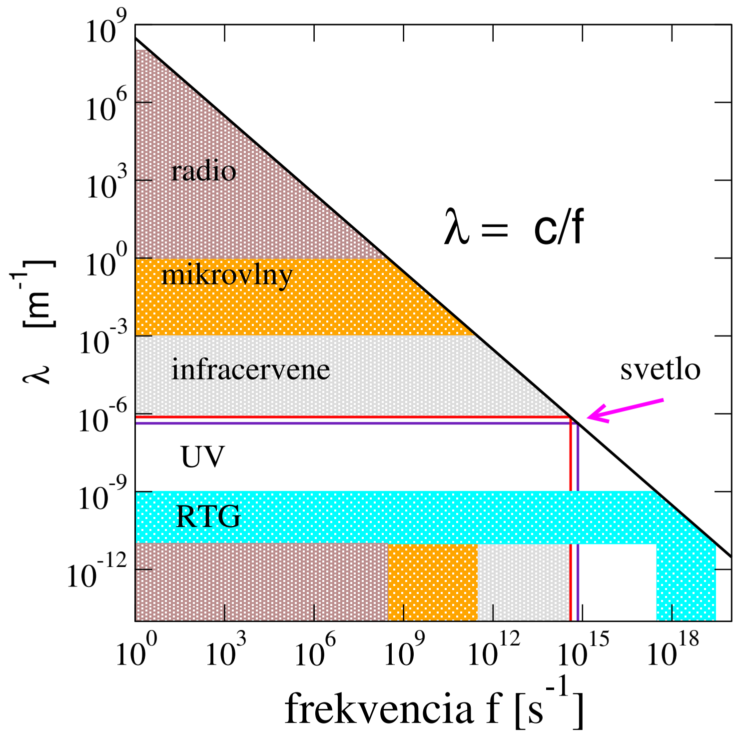
8. **Vlnoplocha**
   Rovinná vlna(1.20) je charakterizovaná amplitúdou $\vec{E}_0$ a fázou $\psi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi$. Vlnoplocha je množina bodov, v ktorých má $\vec{E}$ v danom čase rovnakú fázu.
   Rozdiel fáz v dvoch bodoch $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ v tom istom čase je

   $$\Delta\psi = \vec{k} \cdot [\vec{r}_1 - \vec{r}_2] \tag{1.28}$$

   Vidíme, že

   $$\Delta\psi = 0 \qquad \text{ak} \quad \vec{k} \perp [\vec{r}_1 - \vec{r}_2] \tag{1.29}$$

   Fáza rovinnej vlny je preto rovnaká vo všetkých bodoch, ležiacich v rovine kolmej na vektor $\vec{k}$.



Obr. 1.1. Frekvencie a vlnové dĺžky elektromagnetických vĺn. Všimnite si obrovský rozsah známych elektromagnetických vĺn: frekvencia aj vlnová dĺžka sa môže meniť o viac ako 20 rádov. Na obrázku sú vyznačené o.i. mikrovlny (centimetrové vlny) - sem patria napr. reliktné žiarenie, EM vlny v mikrovlnke, EM vlny používané v mobilnej telekomunikácii, viditeľné svetlo a RTG žiarenie.

9. Prehľad elektromagnetických vĺn: typické vlnové dĺžky pre viditeľné svetlo, RTG, infračervené, mikrovlny, reliktné žiarenie, rádiové vlny . . . (obr. 1.1).

10. **Univerzalita**
Z Maxwellových rovníc vyplýva, že všetky elektromagnetické vlny majú vo vákuu tie isté vlastnosti, nezávisle od frekvencie, resp. od vlnovej dĺžky.

11. Komplexné *vs* reálne hodnoty.
$\vec{E}$ je vo vyjadrení (1.20) komplexné číslo. Všetky fyzikálne veličiny sú, samozrejme, reálne. Komplexné výrazy sú užitočné pri zložitejších matematických operáciách, na konci výpočtov ale vždy musíme uvažovať len reálnu časť komplexného čísla. Napríklad rovinná vlna šíriaca sa v smere osi x môže byť vyjadrená ako

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t + \phi) \tag{1.30}$$

pre vlnu šíriacu sa v smere kladnej osi x (vlnový vektor $\vec{k} = (k_x, 0, 0)$).

12. Vektorový charakter poľa
Orientácia vektora $\vec{E}$ bude dôležitá napr. pri prechode vlny z jedného prostredia do druhého.

1.3 Rovinná vlna ako riešenie Maxwellových rovníc

1. **Maxwellove rovnice pre rovinnú vlnu**
   Po dosadení vzťahu (1.20) dostaneme z diferenciálnych operátorov div a rot vyjadrenie

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E} \tag{1.31}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E} \tag{1.32}$$

2. Z prvej Maxwellovej rovnice máme

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \tag{1.33}$$

   a teda $\vec{E} \perp \vec{k}$ - vektor $\vec{E}$ je kolmý na smer šírenia. Podobne z druhej Maxwellovej rovnice dostaneme $\vec{k} \cdot \vec{H} = 0$ a teda $\vec{H} \perp \vec{k}$. EM vlna je priečna (transverzálna).

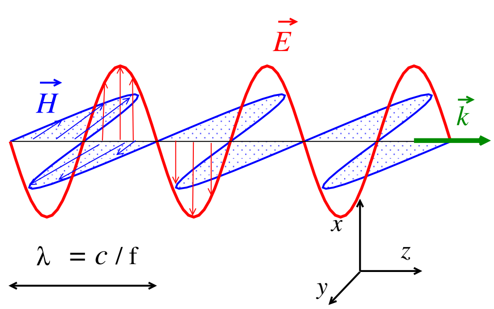
3. Z Maxwellových rovníc dostaneme

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{E} &= +\mu_0 \omega \vec{H} \\ \vec{k} \times \vec{H} &= -\epsilon_0 \omega \vec{E} \end{aligned} \tag{1.34}$$

   Preto sú všetky tri vektory $\vec{E}$, $\vec{H}$ a $\vec{k}$ na seba kolmé:

$$\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{k} \tag{1.35}$$

   Pozri obr. 1.2.



Obr. 1.2. Rovinná elektromagnetická vlna vo vákuu sa šíri v smere vektora $\vec{k}$. Obe intenzity, elektrického a magnetického poľa, sú kolmé na vektor $\vec{k}$ aj kolmé navzájom, v súlade s Maxwellovými rovnicami (1.34). Rovinná EM vlna je transverzálna.

4. **Impedancia vákua**
   Pre absolútne hodnoty vektorov $\vec{E}$ a $\vec{H}$ dostaneme z rovníc (1.34) dva vzťahy medzi amplitúdami elektrickej a magnetickej intenzity:

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{H_0} &= \mu_0 \frac{\omega}{k}, \\ \frac{H_0}{E_0} &= \epsilon_0 \frac{\omega}{k} \end{aligned} \tag{1.36}$$

   Vydeľme jednu rovnicu druhou; dostaneme vzťah medzi amplitúdami E_0 a H_0:

$$E_0 = Z_0 H_0 \tag{1.37}$$

   kde Z_0 je impedancia vákua

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi\ [\Omega] \tag{1.38}$$

   Ak namiesto intenzity magnetického poľa H_0 uvažujeme indukciu $B_0 = \mu_0 H_0$, dostaneme z rovnice (1.37 často používaný vzťah

$$E_0 = cB_0 \tag{1.39}$$

5. **Fyzikálne konštanty** Z_0 a c môžeme považovať za “základné konštanty”, z ktorých odvodíme permitivitu a permeabilitu vákua:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{Z_0 c}, \qquad \mu_0 = \frac{Z_0}{c} \tag{1.40}$$

6. Principiálny rozdiel medzi mechanickými kmitmi a elektromagnetickou vlnou: elektromagnetická vlna nepotrebuje prostredie, v ktorom sa šíri. Zvuková vlna sa vo vákuu šíriť nebude, pretože “nemá čo kmitať”. Šírenie elektromagnetických vĺn vo vákuu bolo dôvodom, prečo ľudia v 19. storočí zaviedli éter ako hmotné nehybné prostredie, v ktorom sa EM vlny môžu šíriť. Éter ale “neprežil” teóriu relativity.

1.4 Polarizácia

1. **Polarizácia EM vlny**
   Vektor $\vec{E}$ je kolmý na $\vec{k}$; jeho orientácia ale nie je jednoznačne určená. Predpokladajme vlnu šíriacu sa v smere z:

$$\vec{k} = (0, 0, k_z) \tag{1.41}$$

Vektor $\vec{E}$ môže byť orientovaný alebo v smere x, alebo v smere y. Vo všeobecnosti má $\vec{E}$ obe zložky:

$$\vec{E} = (E_x, E_y, 0) \tag{1.42}$$

$$E_x = E_{x0} \sin \omega t, \qquad E_y = E_{y0} \sin(\omega t + \phi) \tag{1.43}$$

Výsledná intenzita je (princíp superpozície!)

$$\vec{E} = \vec{i} E_x + \vec{j} E_y \tag{1.44}$$

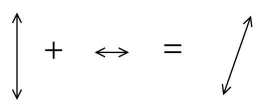
s rôznymi amplitúdami a rôznym fázovým posuvom ϕ.

2. Špeciálne prípady:

   - Lineárne polarizovaná vlna: $\phi = 0$: obe zložky, E_x aj E_y majú maximálne hodnoty v tom istom čase, výsledná intenzita osciluje v rovine (xy) pod uhlom

     $$\tan \alpha = E_{0y}/E_{0x} \tag{1.45}$$

     voči osi x.

   - $\phi = \pi/2$. Teraz

     $$E_x = E_{x0} \sin(\omega t), \qquad E_y = E_{y0} \cos(\omega t) \tag{1.46}$$

     Koncový bod vektora $\vec{E}$ opisuje elipsu s polosami E_{x0} a E_{y0}. Pohybuje sa v zápornom smere - t.j. v smere pohybu hodinových ručičiek.

   - $\phi = -\pi/2$: koncový bod sa pohybuje po elipse (kružnici) v kladnom smere – proti smeru hodinových ručičiek.

   - Kruhovo polarizovaná vlna: amplitúdy $E_{x0} = E_{y0}$, fázový rozdiel $\phi = \pm\pi/2$. koncový bod vektora $\vec{E}$ sa pohybuje po kružnici. Kruhovo polarizované svetlo: pravotočivé ($\phi = \pi/2$), ľavotočivé ($\phi = -\pi/2$).

   - Všeobecný prípad: ľubovoľná hodnota fázového rozdielu ϕ. Koncový bod vektora $\vec{E}$ sa pohybuje po elipse s poloosami, ktoré zvierajú s osami x, y uhol daný fázovým rozdielom ϕ - pozri obr. 1.3.

3. **Všeobecná rovnica**
   Zložky el. poľa spĺňajú v každom časovom okamihu rovnicu

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2\cos\phi \left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right) = \sin^2\phi \tag{1.47}$$

čo je vo všeobecnosti rovnica elipsy.

4. **Cvičenia**

   (1) Presvedčte sa, že rovnica (1.47) opisuje, v závislosti od rozdielu fáz ϕ, polarizáciu:

   - lineárnu $\phi = 0$
   - kruhovú ak amplitúdy $E_{x0} = E_{y0}$ a $\phi = \pm\pi/2$.
   - eliptickú vo všeobecnom prípade.

   (2) Ukážte, že superpozícia dvoch kruhovo polarizovaných vĺn (kladne a záporne) vytvorí lineárne polarizovanú vlnu (obr. 1.4).

5. Odvodenie rovnice (1.47)
   Napíšme

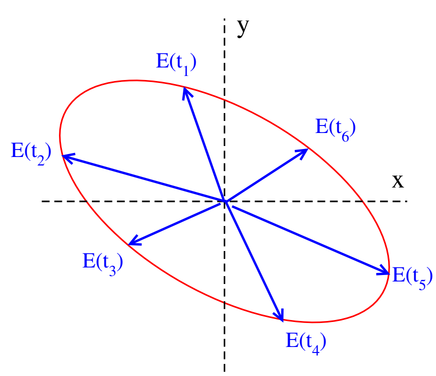
$$\frac{E_x}{E_{x0}} = \sin(\omega t), \qquad \frac{E_y}{E_{y0}} = \sin(\omega t + \phi) \tag{1.48}$$

Preto

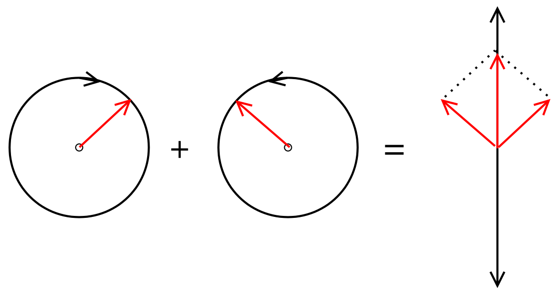
$$\frac{E_x}{E_{x0}} \sin\phi = \sin(\omega t)\sin\phi \tag{1.49}$$

$$\frac{E_x}{E_{x0}} \cos\phi - \frac{E_y}{E_{y0}} = \sin\omega t\cos\phi - \sin(\omega t + \phi) = -\cos\omega t\sin\phi \tag{1.50}$$

Teraz stačí spočítať druhé mocniny pravých strán rovníc (1.49,1.50) a dostaneme rovnicu (1.47).



Obr. 1.3. Elipticky polarizovaná elektromagnetická vlna. Ukázaný je vektor $\vec{E}$ v šiestich časoch v rámci jednej periódy $T = 2\pi/\omega$ ($\vec{E}(t_1 + T) = \vec{E}(t_1)$). Koncový bod vektora $\vec{E}$ sa pohybuje po elipse, danej rovnicou (1.47). Ak $t_1 < t_2 \ldots$, tak sa vektor $\vec{E}$ otáča v kladnom smere. EM vlna sa šíri v kladnom smere osi z.



Obr. 1.4. Superpozícia dvoch opačne orientovaných kruhovo polarizovaných vĺn vytvorí lineárne polarizovanú vlnu. Pre kruhovo polarizovanú vlnu opisuje koncový bod vektora $\vec{E}$ kružnicu; smer rotácie vektora je u dvoch nakreslených vĺn opačný.

1.5 Energia elektromagnetickej vlny, Poyntingov vektor

1. Z Maxwellovej rovnice

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{1.51}$$

po skalárnom vynásobení vektorom $\vec{E}$ dostaneme

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \mathrm{rot}\vec{H} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{1.52}$$

Využijeme vzťah

$$\mathrm{div}[\vec{E} \times \vec{H}] = \vec{H} \cdot \mathrm{rot}\vec{E} - \vec{E} \cdot \mathrm{rot}\vec{H} \tag{1.53}$$

a Maxwellovu rovnicu

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.54}$$

Po dosadení do rovnice (1.52) dostaneme

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\mathrm{div}[\vec{E} \times \vec{H}] - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.55}$$

Posledné dva výrazy na pravej strane vyjadríme ako časovú deriváciu, ak využijeme $D = \epsilon_0 E$ a $B = \mu_0 H$. Dostaneme Poyntingov teorém:

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\mathrm{div}\ \vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} u \tag{1.56}$$

kde na pravej strane vystupuje

2. **Poyntingov vektor**

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{1.57}$$

3. **Hustota energie EM poľa vo vákuu**:

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 |E|^2 + \frac{1}{2}\mu_0 |H|^2 \tag{1.58}$$

4. **Zákon zachovania energie**
   Prepíšme Poyntingov teorém:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -\mathrm{div}\, \vec{S} - \vec{j} \cdot \vec{E} \tag{1.59}$$

   do integrálneho tvaru. Integrujme rovnicu (1.59) cez objem V a definujme energiu elektromagnetického poľa v objeme V

$$U = \int \mathrm{d}V u \tag{1.60}$$

   Využijeme aj všeobecný vzťah vzťah

$$\int \mathrm{d}\, V \mathrm{div}[\vec{E} \times \vec{H}] = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot [\vec{E} \times \vec{H}]. \tag{1.61}$$

   Z rovnice (1.59) dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t} U = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot [\vec{E} \times \vec{H}] - \int \mathrm{d}V \vec{j} \cdot \vec{E} \tag{1.62}$$

   čo je zákon zachovania energie: Energia elektromagnetického poľa v objeme V sa môže meniť (1) vyžarovaním cez plochu, ktorá ohraničuje daný objem, alebo (2) premenou energie na iné formy energie ($\vec{j} \cdot \vec{E}$ je Joulovo teplo).

5. Fyzikálny význam Poyntingovho vektora: tok energie poľa cez jednotkovú plochu za jednotku času.

   Fyzikálna jednotka:

$$[S] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \tag{1.63}$$

6. Rovinná elektromagentická vlna: komplexný formalizmus, reálne hodnoty.
   Energia musí byť reálnou veličinou, preto definujme Poyntingov vektor len pomocou reálnych polí:

$$\vec{S} = \mathrm{Re}\vec{E} \times \mathrm{Re}\vec{H} \tag{1.64}$$

Vyjadrime komplexné polia v tvare

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t]} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi_E]} \tag{1.65}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t} = \vec{\mathcal{H}}_0 e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi_H]} \tag{1.66}$$

kde sme komplexné amplitúdy vyjadrili pomocou ich absolútnej hodnoty a fázy:

$$\vec{E}_0 = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\phi_E}, \qquad \vec{H}_0 = \vec{\mathcal{H}}_0 e^{i\phi_H} \tag{1.67}$$

s reálnymi vektormi $\vec{\mathcal{E}}_0$ a $\vec{\mathcal{H}}_0$. Po dosadení do rovnice (1.64) by sme dostali časovo závislý Poyntingov vektor. Preto ustredníme Poyntingov vektor cez jednu časovú periódu $T = 2\pi/\omega$ oscilácií poľa:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \, \text{Re} \, \vec{E} \times \text{Re} \, \vec{H} \tag{1.68}$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \left[\vec{\mathcal{E}}_0 \times \vec{\mathcal{H}}_0 \right] \, \frac{1}{T} \int_0^T dt \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_E) \cdot \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_H) \tag{1.69}$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \left[\vec{\mathcal{E}}_0 \times \vec{\mathcal{H}}_0 \right] \, \frac{1}{2T} \int_0^T dt \left[\cos(2\vec{k}\cdot\vec{r} - 2\omega t + \phi_E + \phi_H) + \cos(\phi_E - \phi_H) \right] \tag{1.70}$$

lebo $\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$.

Prvá funkcia pod integrálom dá po integrovaní nulu, druhá funkcia nezávisí od času. Preto celkový výsledok je

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \left[\vec{\mathcal{E}}_0 \times \vec{\mathcal{H}}_0 \right] \, \cos[\phi_E - \phi_H] = \frac{1}{2} \text{Re} \, \vec{E}_0 \times \vec{H}_0^{\,*} = \frac{1}{2} \text{Re} \, \vec{E} \times \vec{H}^* \tag{1.71}$$

Posledný výraz

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \, \left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right] \tag{1.72}$$

je často používaný v literatúre.

Z Poyntingovho vektora vieme odhadnúť intenzitu elektrického poľa, pretože magnetického poľa sa “zbavíme” vďaka vzťahu $E_0 = Z_0 H_0$.

$$S \; = \frac{1}{2Z_0} |E_0|^2 = \frac{1}{2Z_0} |E|^2 \tag{1.73}$$

Vzťah (1.73) je najčastejšie používaným vyjadrením Poyntingovho vektora.

7. **Príklady**, kde s amôžeme stretnúť s prenosom energie prostredníctvom elektromganetických vĺn:

    - Mikrovlnka s príkonom $P = 1000$ W.
      Ak je plocha, cez ktorú prechádzajúce vlny Σ, tak Poyntingov vektor

      $$S = P/\Sigma \tag{1.74}$$

      a z rovnice (1.73 dostaneme intenzitu elektrického poľa

      $$E_0 = \sqrt{2Z_0 P/\Sigma} \tag{1.75}$$

      Napríklad ak je $\Sigma = 0,07$ m^2, je intenzita elektrického poľa $E_0 = 3233$ V/m.
    - Laserové ukazovátko.
    - Elektromagnetické vlny, prichádzajúce zo Slnka a dopadajúce na horný okraj atmosféry Zeme, prenášajú každú sekundu plochom 1 m^2 energiu približne 1 400 J. Preto POyntingov vektor

      $$P = 1\,400 \text{ W/m}^2 \tag{1.76}$$

    - Ak žiarovka emituje 100 W, prechádza každou plochou, ktorá ju obopína, každý sekundu 100 J. Ak je plochou guľa polomeru R, celková plocha narastá $\sim R^2$ a Poyntingov vektor klesá so vzdialenosťou od žiarovky ako $1/R^2$.
    - Anténa vyžaruje elektromagnetické vlny, ktoré zachytáva napríklad mobil; Poyntingov vektor opať klesá so vzdialenosťou od antény, preto je potrebné „pokryť” celé územie sieťou antén.

8. Podobne môžeme aj pre hustotu energie EM poľa odvodiť strednú hodnotu ustrednením cez jednu periódu oscilácií EM vlny:

   $$\langle u \rangle = \frac{1}{4}\vec{E} \cdot \vec{D}^* + \frac{1}{4}\vec{H} \cdot B^* \tag{1.77}$$

   opäť stredujeme cez jednu periódu T. Ak využijeme vzťahy $D = \epsilon_0 E$, $B = \mu_0 H$ a $H = E/Z_0$, dostaneme

   $$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 |E|^2 \tag{1.78}$$

9. **Hybnosť elektromagnetickej vlny**
   Bez odvodenia: hustota hybnosti elektromagnetickej vlny

   $$g = \frac{S}{c^2} \tag{1.79}$$

   $[g] =$ Ns/n^3.

10. **Poyntingov vektor a hustota energie**
Porovnaním vzťahov

$$S = \frac{1}{2Z_0}|E|^2, \qquad u = \frac{1}{2}\epsilon_0|E|^2, \tag{1.80}$$

dostaneme

$$S = cu \tag{1.81}$$

11. **Princíp superpozície a Poyntingov vektor**
Princíp superpozície je dôsledkom linearity Maxwellových rovníc: ak $\vec{E}_1$ a $\vec{E}_2$ sú riešeniami MR (bez prúdov a nábojov), tak aj ich lineárna kombinácia

$$\vec{E} = \alpha_1\vec{E}_1 + \alpha_2\vec{E}_2 \tag{1.82}$$

je riešením. Energia poľa u aj Poyntingov vektor sú ale kvadratickými funkciami intenzity poľa. Vďaka tomu pozorujeme mnohé zaujímavé vlnové javy, typické pre vlny - napr. interferenciu a difrakciu.

KAPITOLA 2

Elektromagnetické pole v materiálovom prostredí

Literatúra: [3], kap. 14, [6, 8], [4], kap. 6

2.1 Elektrická permitivita

1. V statickej limite $\omega = 0$ poznáme vzťah

   $$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \tag{2.1}$$

   Relatívna permitivita ϵ_r je materiálový parameter – pole vo vnútri materiálu je ϵ_r-krát menšie, ako pole v okolí.

2. Vzťah (2.1) musíme zovšeobecniť, pretože v prípade elektromagnetickej vlny elektrické pole E závisí od času - mení orientáciu s časovou periódou $T = 2\pi/\omega$. Materiál určite ovplyvňuje hodnoty elektrickej intenzity, pretože pozostáva z nabitých častíc – elektrónov, iónov apod., na ktoré elektrické pole silovo pôsobí.

3. Ak $\vec{D}(t)$ je dôsledkom pôsobenia elektrického poľa v rôznych časoch $\tau < t$, tak vzťah elektrickej indukcie $\vec{D}$ a elektrickej intenzity $\vec{E}$ má tvar

   $$\vec{D}(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{t} d\tau \; \epsilon_r(t-\tau) \; \vec{E}(\tau) \tag{2.2}$$

   Princíp kauzality: $\vec{E}(\tau)$ je príčina, $\vec{D}(t)$ je následok, preto

   $$\epsilon_r(t-\tau) \equiv 0 \qquad \text{ak } \; \tau > t \tag{2.3}$$

   Funkcia $\epsilon(\tau)$ obyčajne rýchlo klesá ako funkcia τ - materiál si "pamätá" vonkajšie podnety len nejaký čas, potom "zabudne".

4. Monochromatická vlna: Ak je elektrické pole

$$\vec{E}(\tau) = \vec{E}_\omega e^{-i\omega\tau} \tag{2.4}$$

tak časová závislosť elektrickej indukcie bude $\vec{D}(t) = \vec{D}_\omega e^{-i\omega t}$. Po dosadení dostaneme

$$\vec{D}_\omega = \epsilon_0 \vec{E}_\omega \int d\tau \epsilon_r(t-\tau) e^{i\omega(t-\tau)} \tag{2.5}$$

Ak definujeme frekvenčne závislú relatívnu permitivitu

$$\epsilon_r(\omega) = \int d\tau \epsilon_r(t-\tau) e^{i\omega(t-\tau)} \tag{2.6}$$

dostaneme

$$\vec{D}_\omega = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \vec{E}_\omega \tag{2.7}$$

čo je opäť vzťah (2.1) s relatívnou permitivitou $\epsilon_r(\omega)$, ktorá ale teraz závisí od frekvencie.

5. Pre všeobecnú časovú závislosť $\vec{E}(t)$ predpokladajme, že $\vec{E}(t)$ môžeme rozložiť do superpozície všetkých možných rovinných vĺn (Fourierova transformácia):

$$\vec{E}(t) = \int \mathrm{d}\omega e^{-i\omega t} \vec{E}(\omega) \tag{2.8}$$

Každá rovinná vlna má amplitúdu $\vec{E}(\omega)$. Tak isto vyjadríme všetky časovo závislé funkcie:

$$\begin{aligned} \vec{D}(t) &= \int \mathrm{d}\omega e^{-i\omega t} \vec{D}(\omega) \\ \epsilon_r(t) &= \int \mathrm{d}\omega e^{-i\omega t} \epsilon_r(\omega) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Po dosadení do rovnice 2.1 dostaneme vzťah medzi Fourierovymi komponentami:

$$\vec{D}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \vec{E}(\omega) \tag{2.10}$$

Relatívna permitivita teda závisí od frekvencie. Funkcie $\epsilon_r(\omega)$ a $\epsilon_r(\tau)$ spolu súvisa Furierovou transformáciou (2.6), resp. (2.9).

6. Relatívna permitivita je teda funkciou frekvencie. To je fyzikálne pochopiteľné, pretože frekvencia určuje rýchlosť, akou sa dipóly v látke musia preorientovať, keď sa zmení polarita elektrického poľa. Pre malé frekvencie majú na preorientáciu dosť času, pre vysoké frekvencie sa ale nemusia stačiť preorientovať a relatívna permitivita bude klesať.

7. Príklady frekvenčne závislej permitivity: permitivita vody, rozklad svetla na Newtonovom hranole.

8. Všimnime si, že keby relatívna permitivita $\epsilon_r(\omega)$ nezávisela na frekvencii, bola by jej Fourierov obraz $\epsilon_r(t-\tau) = \delta(t-\tau)$. Materiál by teda mal okamžitú odozvu na elektrické pole, čo je nefyzikálne.

2.2 Frekvenčná závislosť elektrickej permitivity

1. Elektrická odozva homogénneho prostredia závisí od jeho štruktúry. Nás predovšetkým zaujíma, ako permitivita závisí od frekvencie dopadajúcej EM vlny.

2. **Lorentzov model dielektrického prostredia**

   Najjednoduchší klasický model opisujúci rezonančnú frekvenčnú závislosť permitivity je založený na predstave oscilujúcich nabitých častíc v materiáli. Uvažujme rovinnú elektromagnetickú vlnu s intenzitou elektrického poľa

$$E_x(t) = E_0 e^{-i\omega t} \tag{2.11}$$

   orientovanou v smere osi x. Ak vlna prechádza materiálom, vyvolá v ňom elektrické pole oscilácie nabitých častíc. Pohybová rovnica častice s hmotnosťou m a nábojom Q bude pohybovou rovnicou tlmeného harmonického oscilátora s budiacou silou

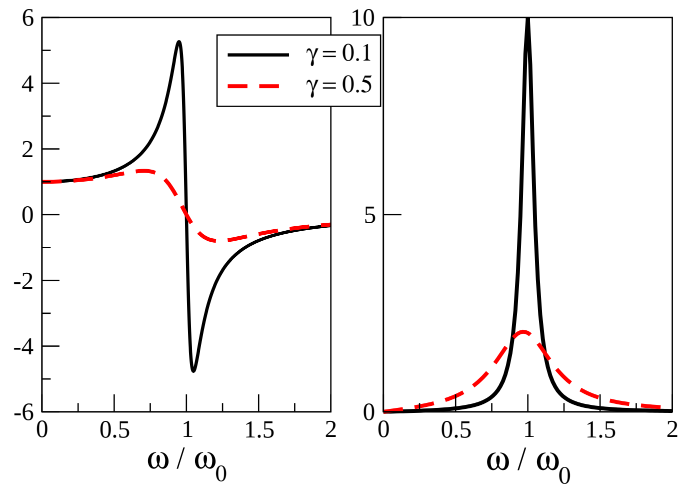
$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + m\omega_0^2 x + m\gamma\frac{\partial x}{\partial t} = QE_x(t) \tag{2.12}$$

   kde ω_0 je vlastná frekvencia oscilácií častice okolo jej rovnovážnej polohy, a γ je stratový člen. Riešenie rovnice (2.12) hľadáme v tvare

$$x(t) = x_0 e^{-i\omega t} \tag{2.13}$$

   Pre amplitúdu x_0 dostaneme

$$x_0 = \frac{QE_0/m}{\omega_0^2 - \omega(\omega + i\gamma)} \tag{2.14}$$



Obr. 2.1. Permitivita ako funkcia frekvencie, daná rovnicou (2.16), pre $\omega_p = 1$ a pre dve hodnoty parametra γ. Vľavo reálna časť, vpravo imaginárna časť.

Ak N je koncentrácia nábojov (počet nábojov na jednotku objemu), potom polarizácia $P = NQx$ definuje relatívnu permitivitu materiálu ϵ vzťahom

$$P = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E \tag{2.15}$$

Kombináciou týchto rovníc dostaneme frekvenčne závislú *relatívnu* permitivitu

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega(\omega + i\gamma)} \tag{2.16}$$

kde $\omega_p^2 = NQ^2/\epsilon_0 m$. Vzťah (2.16) opisuje frekvenčnú závislosť relatívnej permitivity v okolí rezonancie (obr. 2.1).

3. **Komplexná permitivita a energetické straty**

   Relatívna permitivita $\epsilon(\omega)$ je komplexné číslo. Jej odvodenie napovedá, že imaginárna časť permitivity súvisí so stratami – absorpciou precházajúceho žiarenia v materiáli. V Lorentzovom modeli náboje (najčastejšie elektrónu) kmitajú okolo rovnovážnych polôh a prechádzajúca EM vlna svojou elektrickou intenzitou “zabezpečí” budiacu silu. “Trenie” oscilátora reprezentuje energetické straty - napríklad energiu, ktorú kmitajúce náboje odovzdajú kryštalickej mriežke, alebo vyžiaria do všetkých smerov.

   V teórii elektromagnetického poľa sa odvádzajú Kramers-Kronigove vzťahy medzi reálnou a imaginárnou časťou permitivity. Teraz ich nepotrebujeme, spomenieme len, že tieto vzťahy sú dôsledkom kauzality (pozri vzťah (2.2). Vyplýva z nich, že ak permitivita závisí od frekvencie, potom musí byť komplexná. Pretože komplexná časť permitivity súvisí so stratami energie, znamená to, že akýkoľvek materiál, v ktorom permitivita závisí do frekvencie, musí absorbovať prechádzajúce žiarenie. Absorpcia môže byť niektorých intervaloch frekvencie veľmi malá, ale takmer v každom materiáli sa nájdu oblasti frekvencií, v ktorých je absorpcia žiarenia veľká.

4. **Kovy**

   V kovoch sú voľné elektróny s nábojom $Q = -e$, preto zo vzťahu (2.16) s rezonančnou frekvenciou $\omega_0 = 0$ dostaneme Drudeho vzťah pre relatívnu permitivitu kovu

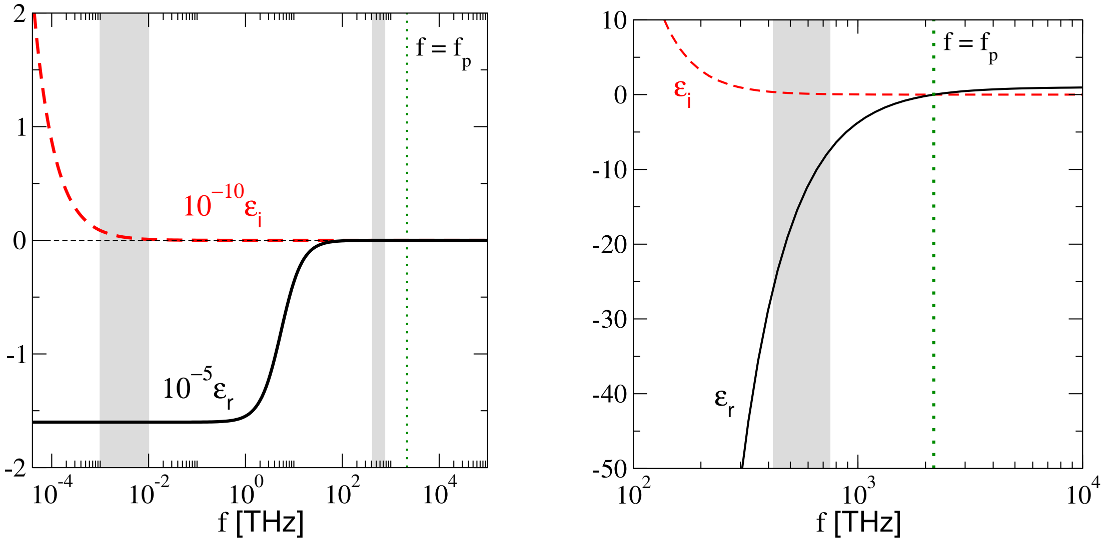
$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \tag{2.17}$$

kde

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \tag{2.18}$$

je *plazmová frekvencia* a stratový člen γ definuje absorpčné straty. Typické hodnoty plazmovej frekvencie a stratového člena pre najpoužívanejšie kovy - striebro, zlato, meď – sú

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \approx 2000 \text{ THz}, \qquad \gamma_0 = \frac{\gamma}{2\pi} \sim 4 - 10 \text{ THz} \tag{2.19}$$



Obr. 2.2. Frekvenčná závislosť permitivity kovu podľa Drudeho modelu (rovnica 2.17). Vyznačená je plazmová frekvencia $f \sim 2\,000$ THz, oblasť viditeľného svetla $(400 - 700$ THz) a oblasť mikrovĺn, kde má reálna časť permitivity typickú hodnotu $\epsilon_r \sim -10^5$ a imaginárna časť $\epsilon_i \sim 10^7$. Pravý obrázok zobrazuje permitivitu v oblasti viditeľného svetla a jej okolí. Imaginárna časť permitivity je vždy kladná. Reálna časť permitivity mení znamienko zo zápornej na kladnú keď frekvencia prekročí hodnotu $f = \sqrt{f^2 + \gamma_0^2}$.

Napríklad pre striebro $f_p = 2175$ THz, a $\gamma_0 = 4,35$ THz. Ako vidíme na obr. 2.2, reálna časť permitivity kovov je pre frekvencie $f < f_p$ záporná. Preto sa EM vlny s frekvenciami $f < f_p$ vo vnútri kovu nešíria. Voľné elektróny sú schopné odtieniť dopadajúce elektromagnetické vlnenie. Pre frekvencie vyššie ako plazmová frekvencia, $f > f_p$ je ϵ' kladná, a odozva kovu zodpovedá odozve stratového dielektrika.

V kovoch nemôžeme v žiadnej oblasti frekvencií zanedbať imaginárnu časť permitivity. V oblasti viditeľného svetla je $\epsilon'' \sim 1$. Pre nižšie frekvencie dosahuje ϵ'' hodnoty $\sim 10^7$.

Drudeho model dáva len približné hodnoty permitivity kovu. Pre kvantitatívne výpočty je potrebné uvážiť podrobnejšie modely. V prípade kovových nanočastíc závisí permitivita aj od ich veľkosti.

Dielektriká

Aj v dielektrikách dochádza k absorpčným stratám. Ďaleko od rezonancií je však imaginárna časť permitivity taká malá, že ju v mnohých aplikáciách môžeme zanedbať: $\epsilon \approx \epsilon_r$. Relatívna permitivita dielektrika ϵ je kladná. V oblasti viditeľného svetla sa typické hodnoty reálnej časti ϵ pohybujú v intervale

$$1 < \epsilon' < 12 \tag{2.20}$$

a hoci mierne závisia od frekvencie, môžeme túto frekvenčnú závislosť zanedbať.

5. **Magnetická permeabilita**

Relatívna magnetická permeabilita μ je pre všetky materiály dostupné v prírode kladná. Pre diamagnetické materiály je $\mu < 1$, pre paramagnetické materiály $\mu > 1$.

Podobne ako permitivita aj magnetická permeabilita závisí od frekvencie. Landau ukázal, že pre vysoké frekvencie je $\mu \equiv 1$. To znamená, že žiadny prírodný materiál nie je schopný ovplyvniť vysokofrekvenčné magnetické pole. Preto sa v optike *a priori* uvažuje len elektrická odozva materiálov a index lomu $n = \sqrt{\epsilon}$.

2.3 Rovinná vlna v materiálovom prostredí

1. Maxwellove rovnice v materiálovom prostredí.
   Uvažujeme len monochromatickú vlnu

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{2.21}$$

   Pre ktoré platí $\vec{D} = \epsilon_0\epsilon_r(\omega)\vec{E}$. Zložitejšie polia zostrojíme ako superpozíciu monochromatických vĺn. Vďaka vzťahu

$$\mathrm{rot}\vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E} \tag{2.22}$$

   majú Maxwellove rovnice tvar

$$\vec{k} \times \vec{E} = +\omega\mu_0\mu_r(\omega)\vec{H} \tag{2.23}$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega\epsilon_0\epsilon_r(\omega)\vec{E} \tag{2.24}$$

2. Relatívna impedancia

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \tag{2.25}$$

   je číslo (tak, ako relatívna permitivita ϵ a relatívna permeabilita μ).

   Pomer amplitúd

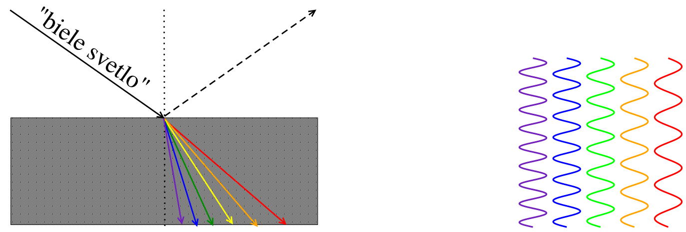
$$\frac{E_0}{H_0} = Z_0 Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \tag{2.26}$$

3. **Disperzný vzťah pre rovinnú elektromagnetickú vlnu** V materiálovom prostredí má disperzný vzťah všeobecnejší tvar

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega)\mu(\omega) \tag{2.27}$$

   Vo väčšine prípadov môže predpokladať, že $\mu(\omega) \approx 1$ v oblasti optických frekvencií.

4. **Fázová a grupová rýchlosť:** Ak index lomu závisím od frekvencie, potom je vzťah medzi frekvenciou ω a vlnovým vektorom $\vec{k}$ nelineárny a musíme odlíšiť dve rýchlosti:



Obr. 2.3. Demonštrácia frekvenčnej závislosti indexu lomu: Ak biele svetlo dopadá na povrch materiálu, rozkladá sa na farebné zložky, pretože uhol lomu je funkciou indexu lomu $n(\omega)$. Z obrázku vidieť, že v oblasti viditeľného svetla index lomu s rastúcou frekvenciou rastie.

5. **Fázová rýchlosť**
   je rýchlosť zmeny fázy EM vlny

$$\vec{v}_f = \frac{\omega}{k}\vec{s}, \qquad \vec{s} = \frac{\vec{k}}{k} \tag{2.28}$$

   Fázová rýchlosť môže nadobúdať akékoľvek hodnoty (aj väčšie, ako rýchlosť svetla), dokonca aj záporné. Zmena fázy totiž nesúvisí s prenosom energie.

6. **Grupová rýchlosť**
   definuje rýchlosť a smer šírenia energie.

$$\vec{v}_g = \text{grad}_{\vec{k}}\, \omega(\vec{k}) \tag{2.29}$$

   Má teda smer Poyntingovho vektora. Grupová rýchlosť má fyzikálny význam len v oblasti frekvencií, kde sa relatívna permitivita $\epsilon(\omega)$ nemení príliš rýchlo s frekvenciou.

2.4 Komplexné veličiny a absorpcia

1. Všeobecnejší tvar pre hustotu energie (pre reálnu permitivitu ϵ)
   uvedieme bez odvodenia

$$u = \frac{\partial[\omega\epsilon(\omega)]}{\partial\omega}E^2 + \frac{\partial[\omega\mu(\omega)]}{\partial\omega}H^2 \tag{2.30}$$

   Energia musí byť kladná, aj keď je permitivita záporná, $\partial(\omega\epsilon)/\partial\omega > 0$.

2. Zovšeobecnená Poyntingova veta (na prednáške nebola)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{j}\cdot\vec{E} - \text{div}\vec{S} - Q \tag{2.31}$$

   Stratový člen Q predstavuje absorbovanú energiu v jednotke objemu za jednu časovú periódu kmitov poľa:

$$Q = \epsilon_0\omega\epsilon''|E|^2 + \mu_0\omega\mu''|H|^2 \tag{2.32}$$

Vidíme teda, že imaginárna zložka permitivity určuje absorpčné straty v látke.

Rovnice (2.30,2.32) sú len približné, boli odvodené za predpokladu, že permitivita sa len pomaly mení s frekvenciou.

3. **Index lomu**

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \tag{2.33}$$

závisí od frekvencie a je vo všeobecnosti komplexný.

4. Prechod svetla rozhraním – napríklad medzi vzduchom a sklom – (obr. 2.3) demonštruje, že index lomu n závisí od frekvencie. Rozklad bieleho svetla na hranole pozoroval už Newton.

5. Index lomu vody
Permitivita vody pri nízkych frekvenciách ($<$ 10 GHz) je obrovská ($\epsilon \approx 81$). To súvisí s tým, že molekuly vody sú polárne a v elektrickom poli sa dipóly "zoradia" do smeru poľa. Index lomu je preto $n \sim 9$. Pri vyšších frekvenciách dipóly nestíhajú sledovať zmeny orientácie elektrického poľa, permitivita klesá a v oblasti viditeľného svetla je len ~ 1.77 (index lomu $n \approx 1.33$). V oblasti viditeľného svetla index lomu pomaly rastie s frekvenciou. [11]

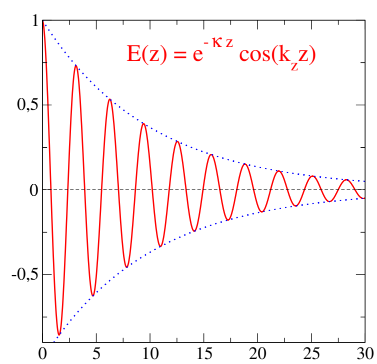
   Frekvenčnú závislosť indexu lomu vody vidíme pri rozklade bieleho svetla na kvapkách vody – dúha.

6. Komplexný index lomu $n_r = n' + in''$ znamená, že vlnový vektor je tiež komplexný,

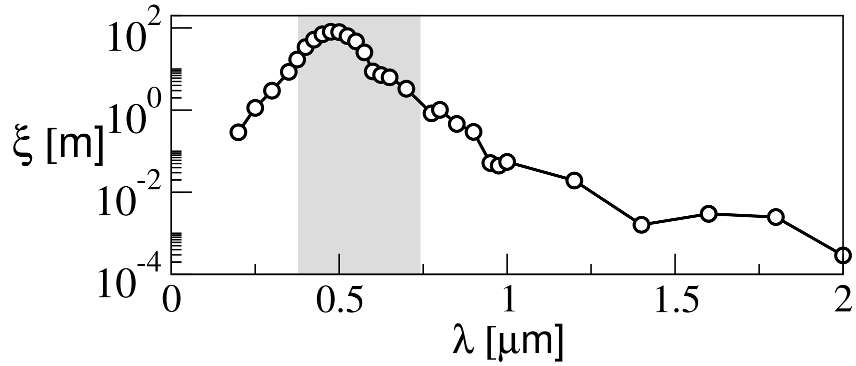
$$k \;= \frac{\omega}{c} n = k_r + i\kappa \tag{2.34}$$

   Imaginárna časť κ definuje exponenciálny pokles EM vlny v materiáli, spôsobený absorpciou

$$\kappa = \frac{\omega}{c} n'' \tag{2.35}$$



Obr. 2.4. Exponenciálny pokles EM vlny v absorbujúcom prostredí pre hodnotu $\kappa = 0,1$.



Obr. 2.5. Typická vzdialenosť a (rovnica (2.38), do ktorej prenikne elektromagnetické žiarenie do vody, ako funkcia vlnovej dĺžky. Vyznačená je oblasť vlnových dĺžok viditeľného svetla. Všimnime si logaritmickú škálu na vertikálnej osi. Viditeľné svetlo preniká do vody do hĺbky niekoľko sto metrov, ale už infračervené (s vlnovými dĺžkami okolo jedného mikrometra) len do hĺbky niekoľko centimetrov, a pre $\lambda \sim 2\ \mu$m je všetko žiarenie absorbované na vzdialenostiach zlomkov milimetra. Podobne klesá aj hĺbka vniku v blízkej ultrafialovej oblasti (menšie vlnové dĺžky). Údaje pre širší interval vlnových dĺžok nájdete napr. v [11].

preto musí byť $\kappa > 0$ a teda pre každý materiál musí platiť

$$n'' > 0 \tag{2.36}$$

Rovinná vlna exponenciálne klesá

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{ik_r z} e^{-\kappa z} e^{-i\omega t} \tag{2.37}$$

(obr. 2.4) Typická dĺžka, na ktorej je vlna absorbovaná:

$$a = \frac{1}{\kappa} = \frac{c}{\omega n''} \tag{2.38}$$

Pre viditeľné svetlo je $c/\omega \sim 10^{-6}$ m. Imaginárna časť indexu lomu n'' musí byť veľmi malá, inak EM vlna zanikne na pomerne malých vzdialenostiach. Napr. ak je $n'' = 10^{-3}$, svetlo prenikne do hĺbky cca $a \sim 1$ mm. Z rovnice (2.32) dostaneme fyzikálnu podmienku

$$\epsilon'' > 0 \tag{2.39}$$

ktorá musí platiť pre všetky materiály, v ktorých dochádza ku stratám. Reálna časť permitivity, ϵ'', však môže byť kladná aj záporná.

7. Príklad absorpcie: absorpcia EM vĺn vo vode - pozri obrázok 2.5.

8. Mikrovlnka: zariadenie na absorbovanie elektromagnetických vĺn. Vlnová dĺžka je zvolená tak, aby zodpovedala rezonančnej frekvencii kmitov molekúl vody. preto sa v kvalitnej mikrovlnke prázdny keramický hrnček nezohreje, ale voda v ňom áno.

9. Záverečné poznámky
   Z rovnice (2.32 vidíme, že aj imaginárna časť magnetickej permeability je vždy kladná,

$$\mu'' > 0 \tag{2.40}$$

Ak je permitivita komplexná, musí byť komplexná aj relatívna impedancia. Jej **reálna** zložka však vždy musí byt kladná,

$$Z' > 0 \tag{2.41}$$

pretože vystupuje vo vzťahu pre Poyntingov vektor.

KAPITOLA 3

Prechod EM vlny rozhraním

Literatúra: [3], kap. 3, [6], [4], kap. 2

3.1 Rovinná vlna na rozhraní

1. Doteraz sme uvažovali rovinnú EM vlnu v homogénnom prostredí. Teraz opíšeme prechod EM vlny cez rovinné rozhranie medzi dvoma homogénnymi prostrediami s indexami lomu n_1 a n_2 (pozri obrázok 3.1). Chceme nájsť amplitúdy prechodu (t) a odrazu (r), a koeficienty prechodu cez rozhranie T a odrazu od rozhrania ($R = |r|^2$).

2. **Okrajové podmienky na rozhraní** Spojitosť tangenciálnych zložiek $\vec{E}$ a $\vec{H}$. Preto je pri výpočte koeficientov prechodu a odrazu musíme odlišovať polarizáciu EM vlny. Vlna polarizovaná s $\vec{E} \parallel y$ sa bude na rozhraní chovať inak ako vlna polarizovaná s $\vec{H} \parallel y$ (obr. 3.1).

3. **Čo sa zachováva pri prechode EM rovinným rozhraním?**
   Pretože $\vec{E}$ na rozhraní osciluje v čase aj v priestore (pozdĺž rozhrania), musia sa zachovávať

   - frekvencia ω
   - tangenciálna zložka vlnového vektora k_x
   - amplitúdy tangenciálnych zložiek polí

   Po prechode cez rozhranie sa ale nezachováva vlnová dĺžka.

4. **Snellov zákon**
   Je dôsledkom spojitosti zložky vlnového vektora rovnobežného s rozhraním k_x:

   $$k_{x1} = k_{x2} = k_x \tag{3.1}$$

Ale

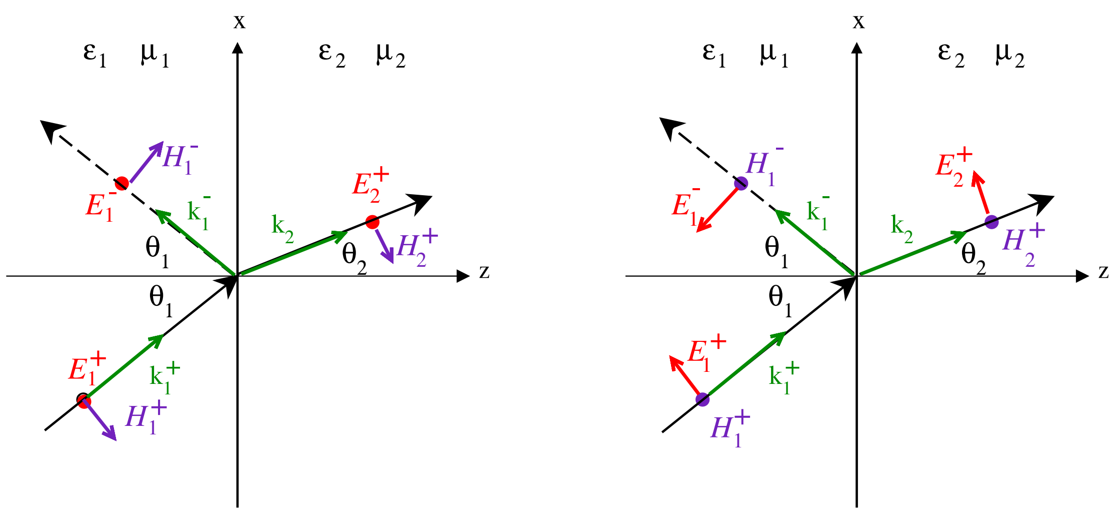
$$k_{x1} = k_1 \sin\theta_1 = \frac{\omega}{c} n_1 \sin\theta_1 \tag{3.2}$$

$$k_{x2} = k_2 \sin\theta_2 = \frac{\omega}{c} n_2 \sin\theta_2 \tag{3.3}$$

Preto platí

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{3.4}$$

Vzťah (3.4) vyjadruje Snellov zákon: umožňuje nájsť uhol prechodu θ_2, ak poznáme uhol dopadu θ_1.



Obr. 3.1. Prechod elektromagnetickej vlny rovinným rozhraním pre dve rôzne polarizácie dopadajúcej vlny. Rozhraním je rovina $z = 0$. Na rozhraní sa skokom mení permitivita a permeabilita. Vľavo: E-polarizovaná elektromagnetická vlna s amplitúdou E_1^+ dopadá na rozhranie zľava pod uhlom θ_1, odráža sa (amplitúda odrazenej vlny je E_1^0) alebo prechádza do druhého prostredia (amplitúda prejdenej vlny je E_2^+). Vektor $\vec{E}$ je rovnobežný s rozhraním, $\vec{E} = (0, E_y, 0)$, a $\vec{H}$ má dve zložky: $\vec{H} = (H_x, 0, H_z)$. Na pravom obrázku je prípad H-polarizovanej vlny s vektorom $\vec{H}$ rovnobežným s rozhraním, $\vec{H} = (0, H_y, 0)$ a $\vec{E} = (E_x, 0, E_z)$. V oboch prípadoch vektory rovnobežné s rozhraním smerujú von z papiera.

3.2 Úplný odraz

1. Disperzný vzťah pre elektromagnetickú vlnu v prostredí 1 a v prostredí 2: Zanedbajme imaginárne časti permitivity - ϵ_1 aj ϵ_2 sú reálne. Potom disperzný vzťah v prostredí (1) a (2) má tvar:

   Prostredie (1)

   $$k_x^2 + k_{1z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_1 \tag{3.5}$$

   Prostredie (2)

   $$k_x^2 + k_{2z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_2 \tag{3.6}$$

   Hodnota k_x je rovnaká v oboch prostrediach. Zložka vlnového vektora v smere z je ale iná, lebo je iná permitivita.

   Ak poznáme k_{1z}, vieme z rovníc (3.5,3.6) nájsť k_{z2}.

   $$k_{2z} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}[\epsilon_2 - \epsilon_1] + k_{1z}^2} \tag{3.7}$$

   Výraz pod odmocninou môže byť

   - kladný – vtedy sa vlna v prostredí 2 šíri s vlnovým vektorom $\vec{k}_2 = (k_x, k_{2z})$.
   - záporný – dochádza k úplnému odrazu.

2. **Úplný odraz**
   Výraz pod odmocninou v rovnici (3.7) môže byť záporný, ak:

   - $\epsilon_2 < \epsilon_1$.
     Vlna prechádza do prostredia s menším indexom lomu. Pretože $k_{1z} = (\omega/c)\cos\theta_1$, môžeme k_{2z} vyjadriť pomocou uhlu dopadu:

     $$k_{2z} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1(1-\cos^2\theta_1)} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1\sin^2\theta_1} \tag{3.8}$$

     Pre malý uhol dopadu je teda k_{2z} reálne, pre kritický uhol θ_c je výraz pod odmocninou nulový, a pre väčšie uhly je záporný.

     $$\sin\theta_c = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} \tag{3.9}$$

     Ten istý vzťah dostaneme zo Snellovho zákona (rovnica (3.4), ak položíme $\theta_2 = \pi/2$.
   - Odraz od povrchu kovu: $\epsilon_2 < 0$
     Z rovnice (3.8) vidíme, že k_{2z} je **vždy** imaginárne. EM vlna sa pri dopade od kovového povrchu úplne odráža, nezávisle od uhla dopadu (v tejto úvahe zanedbávame absorpciu, predpokladáme, že ϵ_2 je reálne číslo).

3. **EM vlna pri úplnom odraze**
   Pretože k_{2z} je rýdzo imaginárne, môžeme ho vyjadriť

$$k_{2z} = i\kappa_2 \tag{3.10}$$

EM vlna v prostredí 2 teda klesá exponenciálne so vzdialenosťou od rozhrania:

$$E_2(z) = E_2(z=0)e^{-\kappa_2 z} \tag{3.11}$$

Nie je ale v prostredí 2 nulová!

Pozor – na rozdiel od absorpcie EM exponenciálne klesá, ale neabsorbuje sa ! Uvidíme neskôr, že koeficient odrazu $R = 1$. Ak počítame Poyntingov vektor v prostredí (2) v smere z:

$$S_z = E_x H_y - E_y H_x \tag{3.12}$$

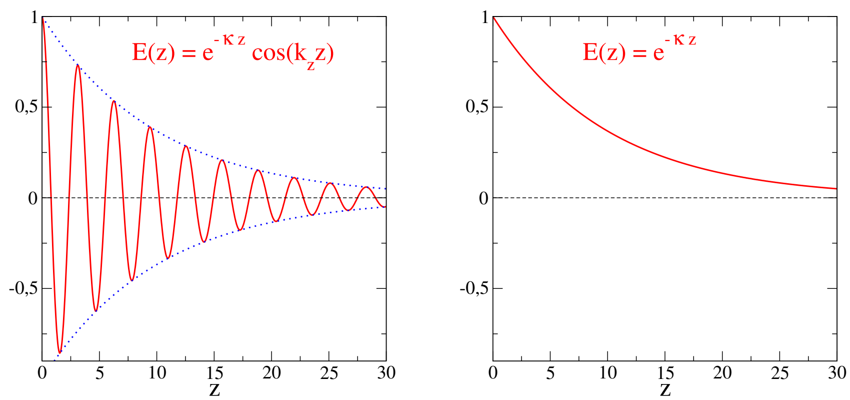
Predpokladajme, že $\vec{E}_0$ je reálny. Z Maxwellovej rovnice

$$\vec{k} \times \vec{E} = \mu_0 \mu_r \omega \vec{H} \tag{3.13}$$

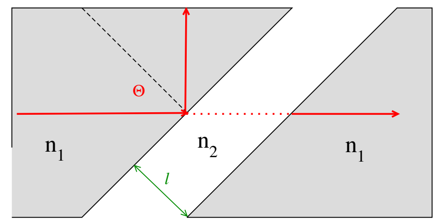
vyjadríme zložky vektora $\vec{H}$ a dostaneme

$$S_z = \frac{1}{\mu_0 \mu_r \omega} \text{ Re } k_z (E_x^2 + E_y^2) \tag{3.14}$$

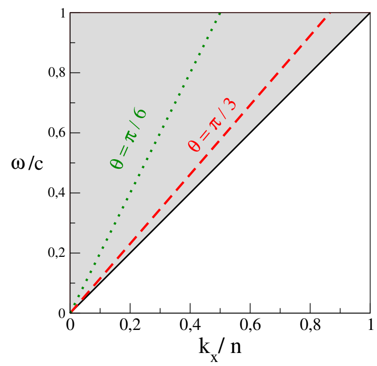
Ak je teda k_{2z} rýdzo imaginárne, je Re $k_{2z} \equiv 0$ a energia sa v smere z nešíri a teda ani neabsorbuje.



Obr. 3.2. Porovnanie z-závislosti intenzity EM vlny pre prípad absorpcie (vľavo) a úplného odrazu (vpravo). V prípade absorpcie je vlnový vektor komplexný, pretože permitivita má reálnu aj imaginárnu časť. Preto $E(z)$ síce exponenciálne klesá, ale zároveň osciluje. V prípade úplného odrazu E len exponenciálne klesá, lebo k_z je rýdzo imaginárne - **evanescentná vlna**.



Obr. 3.3. Príklad tunelovania EM vlny cez úzku štrbinu. Pokiaľ je šírka štrbiny malá (porovnateľná s vlnovou dĺžkou), dokáže svetlo cez ňu pretunelovať a bude sa šíriť ďalej. Intenzita pretunelovaného svetla závisí od hrúbky štrbiny a samozrejme aj od uhla dopadu pôvodnej vlny.



Obr. 3.4. Svetelný kužeľ. Disperzné vzťahy pre rovinnú elektromagnetickú vlnu šíriacu sa v prostredí s indexom lomu n. Index lomu nezávisí od frekvencie, preto je disperzný vzťah $k = (\omega/c)\epsilon$ lineárny. Uhol θ definuje smer šírenia vlny vzhľadom na os z: $k_x = (\omega/c)n \sin\theta$ je zložka vlnového vektora kolmá na os z. Vyšrafovaná oblasť ukazuje oblasť parametrov (k_x, ω), pre ktoré sa EM vlna v prostredí môže šíriť v smere osi z s reálnou zložkou vlnového vektora k_z. Táto oblasť sa nazýva **svetelný kužeľ**. V oblasti mimo svetelného kužeľa je k_z imaginárne a EM vlna exponenciálne klesá.

4. **Evanescentná vlna**
   EM vlna exponenciálne klesajúca v prostredí, na ktorého povrchu nastal úplný odraz (pravý obr. 3.2).

5. Absorpcia *vs* úplný odraz. Pokiaľ nenastáva absorpcia, teda permitivita ϵ_2 je reálna, intenzita E exponenciálne klesá (pravý obr. 3.2). Ak je permitivita komplexná, $\epsilon_2 = \epsilon' + i\epsilon''$, potom je aj k_z komplexný a E okrem exponenciálneho poklesu aj osciluje (ľavý obr. 3.2). Absorpcia teda vyžaduje priestorové osciláciu E. To vidieť z vyjadrenia Poyntingovho vektora S_z (rovnica 3.14).

6. **Tunelovanie** (obr. 3.3). Pre veľmi úzku štrbinu dokáže EM vlna "pretunelovať" cez prostredie, v ktorom sa nemôže šíriť. K tunelovaniu sa vrátime v časti 3.5.

7. **Svetelný kužeľ** (obr. 3.4)
   Uľahčuje analýzu EM vĺn na rozhraní. Svetelný kužeľ definuje oblasť hodnôt parametrov (k_x, ω) pre ktoré sa EM vlna môže šíriť v smere z. Ak index lomu n nezávisí od frekvencie, tak svetelný kužeľ je ohraničený priamkami $k_x^{\min} = 0$ a $k_x^{\max} = (\omega/c)n$.

3.3 Prechod EM vlny rozhraním - Fresnelove vzťahy

1. Ak EM vlna prechádza cez rozhranie, musíme vedieť určiť jej tvar na oboch stranách rozhrania. Všeobecný prípad je ukázaný na obr. 3.1 pre obe polarizácie. Obrázok 3.5 ukazuje E-polarizovanú vlnu s amplitúdou $\vec{E}_1^+$, dopadajúcu zľava na rozhranie. Amplitúda odrazenej vlny je E_1^-, amplitúda prejdenej vlny je E_2^+. Zaujíma nás veličiny (index E znamená, že sa jedná o E-polarizovanú vlnu, analogické veličiny môžeme definovať aj pre H-polarizovanú vlnu).

2. **Amplitúda odrazu**

$$r_E = \frac{E_1^-}{E_1^+} \tag{3.15}$$

3. **Koeficient odrazu**

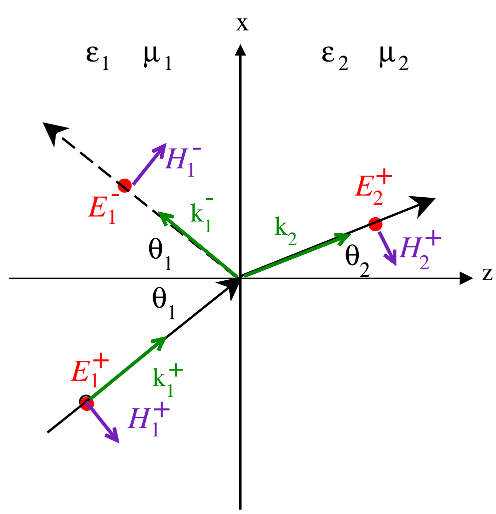
$$R_E = |r_E|^2 \tag{3.16}$$

4. **Amplitúda prechodu**

$$t_E = \frac{E_2^+}{E_1^+} \tag{3.17}$$

5. **Koeficient prechodu**
   Je definovaný ako pomer toku energie v smere z, prechádzajúcej rozhraním a energie dopadajúcej na rozhranie, teda ako pomer z zložiek Poyntingových vektorov:

$$T_E = \frac{S_{2z}}{S_{1z}}, \qquad \text{Poyntingov vektor} \quad \vec{S} = \frac{1}{2}\mathrm{R}e\ \vec{k}\ \frac{|E|^2}{\omega\mu_0\mu} \tag{3.18}$$



Obr. 3.5. Prechod E-polarizovanej elektromagnetickej vlny rovinným rozhraním. Vektor $\vec{E}$ je rovnobežný s rozhraním (intenzita elektrického poľa smeruje von z papiera).

Koeficient prechodu T_E je vo všeobecnosti rôzny od $|t_E|^2$. Amplitúda t_E je pomer intenzít prejdeného poľa k dopadajúcemu, a je vždy nenulový – aj v prípade úplného odrazu!

6. **Odvodenie Fresnelových vzťahov**
   Z podmienky spojitosti polí na rozhraní. Predpokladajme $\mu_1 = \mu_2$.

7. Pre vlnu polarizovanú s $\vec{E}$ rovnobežnú s rozhraním (TE vlnu)

$$\vec{E} = (0, E_y, 0) \tag{3.19}$$

dostaneme z požiadavky spojitosti intenzity elektrického a magnetického poľa rovnice (pozri obr. 3.5)

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ \tag{3.20}$$

$$H_{1x}^+ + H_{1x}^- = H_{2x}^+ \tag{3.21}$$

Vyjadrime teraz magnetické pole pomocou elektrického. Využijeme Maxwellovu rovnicu rot $\vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H}$. Preto platí pre x-ovú zložku $\vec{H}$ vzťah

$$H_x = -\frac{k_z}{\mu_0\omega}E_y \tag{3.22}$$

lebo $\vec{E}$ má len y-ovú zložku. Po dosadení do rovnice (3.21) za všetky tri intenzity H dostaneme rovnicu

$$k_{1z}E_1^+ - k_{1z}E_1^- = k_{2z}E_2^+ \tag{3.23}$$

(znamienko mínus súvisí s tým, že $\vec{k}_1^- = (k_x, 0, -k_z)$ ako vidieť z obr. 3.5). Z rovníc (3.20,3.21) vyjadríme

$$r_E = \frac{E_1^-}{E_1^+} = -\frac{k_{2z} - k_{1z}}{k_{2z} + k_{1z}} \tag{3.24}$$

$$t_E = \frac{E_2^+}{E_1^+} = \frac{2k_{1z}}{k_{2z} + k_{1z}} \tag{3.25}$$

8. Pre vlnu polarizovanú s $\vec{H}$ rovnobežnú s rozhraním (TM vlnu) si vektory $\vec{E}$ a $\vec{H}$ vymenia úlohy. Je treba ešte uvážiť rôznu permitivitu oboch prostredí. Výsledné vzťahy sú

$$r_H = -\frac{k_{2z}/\epsilon_2 - k_{1z}/\epsilon_1}{k_{2z}/\epsilon_2 + k_{1z}/\epsilon_1} = \frac{\epsilon_2 k_{1z} - \epsilon_1 k_{2z}}{\epsilon_2 k_{1z} + \epsilon_1 k_{2z}} \tag{3.26}$$

$$t_H = \frac{2k_{1z}/\epsilon_1}{k_{2z}/\epsilon_2 + k_{1z}/\epsilon_1} \tag{3.27}$$

9. Všimnime si, že pre obe polarizácie platí vzťah

$$t = 1 + r \tag{3.28}$$

(obr. 3.6).

10. Koeficient prechodu: pre reálne hodnoty k_1 a k_2:

$$T_E = \frac{k_{2z}}{k_{1z}} |t_E|^2 = \frac{4k_{1z}k_{2z}}{(k_{1z} + k_{2z})^2} \tag{3.29}$$

a podobne pre T_H, ak nahradíme $k_{1z} \to k_{1z}/\epsilon_1$ a $k_{2z} \to k_{2z}/\epsilon_2$. Vidíme, že T je symetrická: koeficient prechodu z prostredia 1 do prostredia 2 je taký istý, ako v opačnom smere.

11. Koeficient odrazu:

$$R_E = |r_E|^2, \qquad R_H = |r_H|^2 \tag{3.30}$$

12. **Fresnelove vzťahy** vyjadrené pomocou indexov lomu a uhla dopadu
Ak dosadíme $k_{1z} = k_1 \cos\theta_1$ $k_{2z} = k_2 \cos\theta_2$ vyjadríme amplitúdy prechodu a odrazu pomocou indexov lomu a uhlov dopadu/prechodu. Napríklad

$$r_E = \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2}, \qquad r_H = \frac{n_2 \cos\theta_1 - n_1 \cos\theta_2}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2} \tag{3.31}$$

Závislosť amplitúd odrazu r_H a r_E od uhla dopadu θ_1 je ukázaná na ľavom obrázku 3.6. Pre koeficienty prechodu dostaneme

$$T_E = \frac{4n_1n_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2}{(n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2)^2}, \qquad T_H = \frac{4n_1n_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2}{(n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2)^2} \tag{3.32}$$

Pozri pravý obr. 3.6.

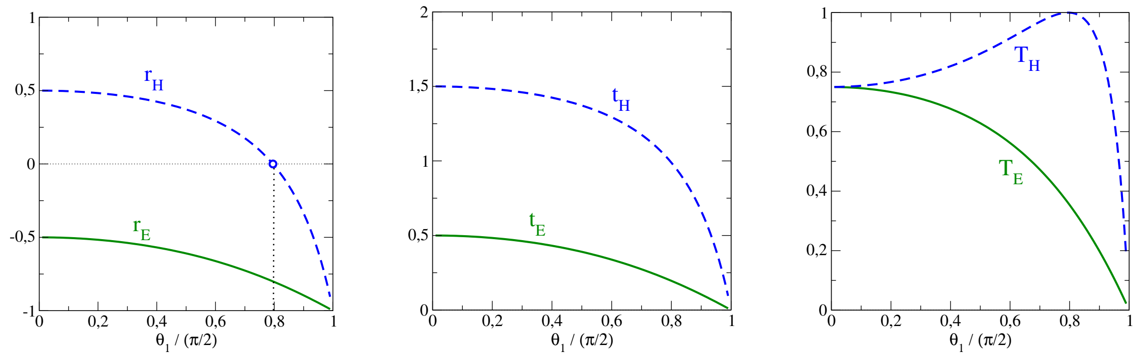
13. **Kolmý dopad** na rozhranie

$$\theta_1 = \theta_2 = 0, \qquad k_{1z} = k_1 = (\omega/c)n_1, \qquad k_{2z} = k_2 = (\omega/c)n_2 \tag{3.33}$$

$$r_H = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \qquad r_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tag{3.34}$$

Dostávame teda

$$r_H = -r_E \qquad \text{kolmý dopad} \tag{3.35}$$



Obr. 3.6. Ľavý obrázok: Amplitúda odrazu na rozhraní dvoch dielektrík ($n_1 = 1$, $n_2 = 3$) ako funkcia uhlu dopadu θ_1 pre E a H polarizovanú vlnu. Amplitúdy sú reálne, ale môžu byť záporné. Všimnime si, že $r_H = 0$ pre Brewsterov uhol $\theta_{1B} \approx 0,8 \times (\pi/2)$. Vidíme tiež, že pre kolmý dopad, $\theta_1 = 0$, platí $r_E = -r_H$. Stredný obrázok: amplitúdy prechodu t_E a t_H. Všimnime si, že t môže byť aj väčšie ako 1 a platí $t = 1 + r$. Vpravo: koeficienty prechodu T_E a T_H (rovnice 3.32).

14. Zdanlivý paradox: pri kolmom dopade sú obe polarizácie rovnocenné – prečo sú amplitúdy odrazu rôzne?
    Vysvetlenie: pri odraze musí jedna zo zložiek vlny ($\vec{E}$ alebo $\vec{H}$) zmeniť znamienko. Ktorá to je, závisí od indexov lomu jednotlivých prostredí: pri dopade na opticky hustejšie prostredie ($n_2 > n_1$) zmení znamienko intenzita elektrického poľa, pri dopade na opticky redšie prostredie ($n_1 > n_2$) intenzita magnetického poľa.

15. Cvičenie: nájdite koeficient odrazu od skla ($n = 1,25$) v prípade kolmého dopadu svetla.

16. **Odraz od kovu**
    Ak zanedbáme absorpciu, bude v kove $k_{2z} = i\kappa$ pretože permitivita kovu $\epsilon_2 < 0$. Pre koeficient odrazu preto dostaneme

$$R_E = 1 \tag{3.36}$$

pretože

$$r_E = -\frac{i\kappa - k_{1z}}{i\kappa + k_{1z}} \tag{3.37}$$

a podobne $R_H = 1$.

17. **Hĺbka vniku**
    EM vlna preniká do kovu do hĺbky $\delta = 2\pi/\kappa$. δ závisí od frekvencie, pretože permitivita kovu ϵ_2 je funkciou frekvencie. Pre kolmý dopad je hĺbka vniku viditeľného svetla

$$\delta \approx 22 \text{ nm} \qquad \text{pre svetlo} \tag{3.38}$$

3.4 Brewsterov uhol

1. Z rovnice (3.26) vyplýva, že pre určitý uhol dopadu θ_{1B} z prostredia 1 je $r_H \equiv 0$ a teda aj $R_H = 0$. Rovnaký výsledok dostaneme, ak vlna dopadá na rozhranie z prostredia 2 pod uhlom θ_{2B}, Vzťah medzi oboma uhlami je daný rovnicou $r_H = 0$:

$$n_1 \cos\theta_{2B} = n_2 \cos\theta_{1B} \tag{3.39}$$

2. **Brewsterove uhly**
Uhly θ_{1B} a θ_{2B}. H-polarizovaná vlna, dopadajúca na rozhranie pod Brewsterovým uhlom, sa od rozhrania neodrazí, ale prechádza do druhého prostredia: $T_H \equiv 1$ (obr. 3.6).

3. Z rovnice (3.39) odvodíme pomocou Snellovho odvodíme vzťahy pre Brewsterove uhly

$$\theta_{1B} + \theta_{2B} = \frac{\pi}{2} \tag{3.40}$$

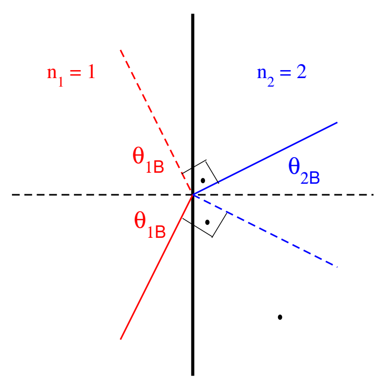
(obr. 3.7), alebo

$$\tan\theta_{1B} = \frac{n_2}{n_1}, \qquad \tan\theta_{2B} = \frac{n_1}{n_2} \tag{3.41}$$

4. Z predchádzajúceho odvodenia vidíme, že rovnica (3.39) má riešenie pre ľubovoľné hodnoty n_1 a n_2.

5. Naopak, pre E-polarizovanú vlnu taký uhol neexistuje, pretože rovnica $r_E = 0$ nemá riešenie pre žiadne hodnoty indexov lomu.

6. **Polarizácia odrazenej vlny**
Ak na rozhranie dopadá nepolarizované vlnenie (teda obsahujúce rovnakým dielom obe polarizácie), odrazená vlna bude čiastočne polarizovaná, pretože $R_E \neq R_H$. V prípade dopadu pod Brewsterovým uhlom θ_{1B} sa bude odrážať len E-polarizovaná vlna – odrazená vlna teda bude lineárne polarizovaná.



Obr. 3.7. Prechod H-polarizovanej EM vlny, dopadajúcej pod Brewsterovým uhlom, cez rozhranie. Prerušované čiary ukazujú smer, pod ktorým by sa vlny odrážali. Obrázok potvrdzuje vzťah (3.40) medzi uhlami θ_{1B} a θ_{2B}.

3.5 Prechod EM vlny cez tenkú vrstvu. Tunelovanie.

Literatúra: [3], kap. 5, [6], kap. 1, kap. 5.

1. Prechod EM vlny cez tenkú dielektrickú vrstvu (obr. 3.8). Hľadáme koeficient prechod a koeficient odrazu elektromagnetickej vlny, ktorá dopadá na dielektrickú vrstvu pod uhlom θ_1. Predpokladajme najprv, že index lomu n_2 je reálny. Koeficient prechodu cez dielektrickú vrstvu potom odvodíme v tvare

$$T = |t|^2 = \frac{1}{1 + \alpha \sin^2 k_{2z}\ell}, \qquad \alpha = \frac{1}{4}\left[\frac{k_{1z}}{k_{2z}} - \frac{k_{2z}}{k_{1z}}\right]^2 \tag{3.42}$$

Všimnime si, že T je daná len z-ovými zložkami vlnových vektorov k_{1z} a k_{2z}. Koeficient prechodu môžeme vyjadriť aj pomocou koeficientu odrazu od rozhrania,

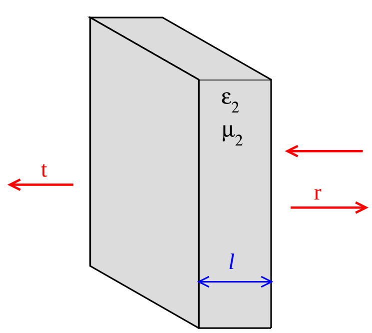
$$R_0 = \frac{k_{1z} - k_{2z}}{k_{1z} + k_{2z}} \tag{3.43}$$

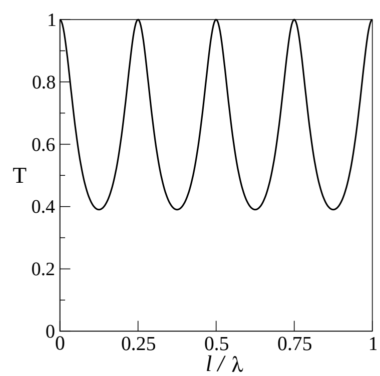
v tvare

$$T = \frac{1}{1 + \alpha \sin^2 k_{2z}\ell}, \qquad \alpha = \frac{4R_0}{(1 - R_0)^2} \tag{3.44}$$

k_2 je vlnový vektor vo vrstve, $k_2 = (\omega/c)n_2$, a k_{2z} je dané vzťahom

$$k_{2z} = k_2 \cos\theta_2 \tag{3.45}$$





Obr. 3.8. Prechod elektromagnetickej vlny cez homogénnu dielektrickú vrstvu hrúbky ℓ. EM vlna dopadá sprava, kolmo na rovinu rozhrania ($\theta_1 = \theta_2 = 0$), amplitúda prechádzajúcej vlny je t, amplitúda odrazenej vlny je r. Na pravom obrázku vidíme, že koeficient prechodu T osciluje ako funkcia pomeru hrúbky vrstvy ℓ a vlnovej dĺžky dopadajúcej vlny λ (*Fabry-Perotove oscilácie*). Vrstva má permitivitu $\epsilon_2 = 4$, prostredie na oboch stranách vrstvy má rovnakú permitivitu $\epsilon_1 = 1$.

2. **Maximálna transmisia**
Koeficient prechodu $T = 1$ nastáva, keď je splnená podmienka

$$k_{2z}\ell = m\pi \tag{3.46}$$

a teda

$$\ell = m\frac{\lambda}{2}\frac{1}{\cos\theta_2} \tag{3.47}$$

(m je celé číslo). Vrstva je pre tieto frekvencie totálne transparentná. V špeciálnom prípade kolmého dopadu je $\theta_2 = 0$. Vtedy hrúbka vrstvy a vlnová dĺžka spĺňajú vzťah

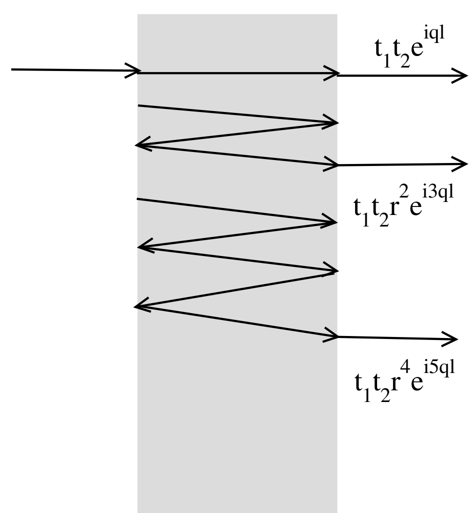
$$\ell = \frac{m}{2}\lambda, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{3.48}$$

3. **Odvodenie vzťahu (3.44)**
Podľa obrázku 3.9 je amplitúda vlny za tenkou vrstvou rovná

$$t = t_1 t_2 e^{ik_{2z}\ell} \times \left[1 + r_2 r_2 e^{i2k_{2z}\ell} + (r_2 r_2 e^{i2k_{22}\ell})^2 + \cdots\right] \tag{3.49}$$

($q = k_{2z}$), r_2 je amplitúda odrazu vlny, šíriacej sa vo vnútri vrstvy, od jej okraja. Geometrický rad na pravej strane sčítame:

$$t = \frac{t_1 t_2 e^{ik_{2z}\ell}}{1 - r_2 r_2 e^{i2k_{2z}\ell}} \tag{3.50}$$



Obr. 3.9. Vlna, ktorá prejde cez vrstvu, je súčtom vĺn, ktoré prekonali vo vrstve rôzne dráhy. Ukázané sú len prvé tri príspevky. (Pozn. $q = k_2$.)

a hľadáme $T = |t|^2$. Využijeme $|r_2|^2 = R_0$, $|t_1 t_2|^2 = (1-R_0)^2$, dosadíme

$$T = |t|^2 = \frac{(1-R_0)^2}{1 + R_0^2 - 2R_0 \cos k_{2z}\ell} \tag{3.51}$$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{2R_0}{(1-R_0)^2}(1 - \cos 2k_{2z}\ell)} \tag{3.52}$$

a pretože $\cos 2k_{2z}\ell = 1 - 2\sin^2 k_{2z}\ell$, dostaneme z posledného vzťahu vzťah (3.44). Podmienka maximálnej transmisie je $k_{2z}\ell = m\pi$. Fyzikálne znamená, že všetky príspevky, z ktorých pozostáva prejdená vlna, opúšťajú dielektrickú vrstvu vo fáze, pretože vo vrstve absolvovali akurát celočíselný násobok vlnovej dĺžky. Líšia sa len svojou amplitúdou. Podobne podmienka

4. **Podmienka maximálnej a minimálnej transmisie**
   Rovnako by sme odvodili, že podmienka

$$k_{2z}\ell = (m + \frac{1}{2})\pi \tag{3.53}$$

zodpovedá minimu transmisie, pretože jednotlivé príspevky sa od seba líšia znamienkom.

5. **Podmienka minimálneho odrazu.**
   Podmienka $k_z\ell = m\pi$ je zároveň podmienkou minimálneho odrazu. Dôvod: odrazená vlna je opäť zložená z nekonečného počtu príspevkov, ktoré prešli vo vrstve dráhu 2ℓ, 4ℓ atď. Na rozdiel od prechádzajúcich vĺn je ale fáza odrazených vĺn posunutá o π, pretože pri výpočte odrazu musíme uvažovať odraz od prednej aj od zadnej strany vrstvy:

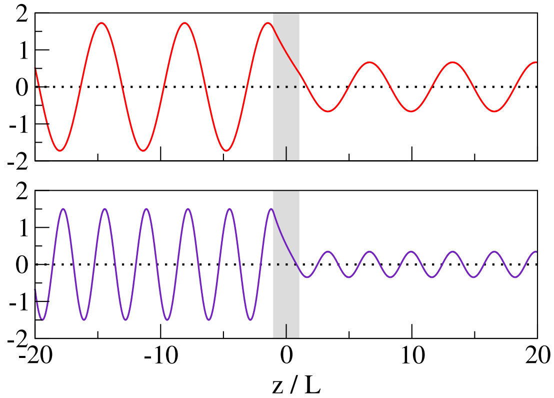
$$r = r_1 + t_1 r_2 t_1 e^{i2k_{2z}\ell} + t_1 r_2 r_1 r_2 t_1 e^{i4k_{2z}\ell} + \dots \tag{3.54}$$

r_1 je amplitúda odrazu od prednej strany vrstvy, r_2 od zadnej strany vrstvy a platí preto

$$r_1 = -r_2 \tag{3.55}$$

Prvý a druhy člen sa teda líšia dodatočným faktorom π daným opačnými znamienkami amplitúd odrazu. Najväčší odraz teda dostaneme vtedy, keď vlna, odrazená od zadnej steny, prejde vo vrstve dráhu $\lambda/2$, aby vykompenzovala zmenu znamienka spôsobenú odrazom. To je ale zároveň podmienka minimálnej transmisie.

6. Závislosť koeficientu prechodu od R_0: pre veľké hodnoty R_0 dostaneme veľmi úzke maximá transmisie – frekvenčný filter.



Obr. 3.10. Priebeh intenzity $E(z)$ pri tunelovaní: v štrbine $E(z)$ exponenciálne klesá, preto amplitúda prejdenej vlny je menšia ako amplitúda dopadajúcej. Exponenciálny pokles závisí od frekvencie (pozri rovnicu 3.8), preto je intenzita červeného svetla za štrbinou väčšia, ako intenzita fialového svetla.

7. **Tunelovanie elektromagnetickej vlny**
Koeficient prechodu T je nenulový aj pre vrstvy zložené z materiálu, pre ktorý by na rozhraní vzduch/materiál dochádzalo k úplnému odrazu alebo ak by vrstva bola kovová. Odvodenie je rovnaké, ako v prípade dielektrickej vrstvy, ak nahradíme $k_{2z} = i\kappa$: Amplitúda prechodu je potom

$$t = t_1 t_2 e^{-\kappa\ell}\left[1 + r_2 r_2 e^{-2\kappa\ell} + \dots\right] \tag{3.56}$$

resp.

$$t = \frac{t_1 t_2 e^{-\kappa\ell}}{1 - r_2 r_2 e^{-2\kappa\ell}} \tag{3.57}$$

a po dosadení za amplitúdy[1]

$$t_1 = \frac{2k_{1z}}{k_{1z} + i\kappa}, \qquad t_2 = \frac{2i\kappa}{k_{1z} + i\kappa}, \qquad r_2 = \frac{k_{1z} - i\kappa}{k_{1z} + i\kappa}, \qquad (r_2^* = 1/r_2) \tag{3.58}$$

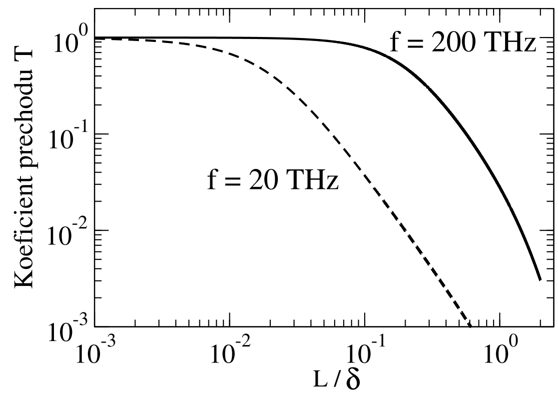
odvodíme $T = t^* t$ v tvare

$$T = \frac{1}{1 + \tilde{\alpha}\sinh^2 \kappa\ell}, \qquad \tilde{\alpha} = \frac{1}{4}\left[\frac{k_{1z}}{\kappa} + \frac{\kappa}{k_{1z}}\right]^2 \tag{3.59}$$

Pre dostatočne hrubú vrstvu $\sinh\kappa\ell \approx e^{+\kappa\ell}$ transmisia exponenciálne klesá s hrúbkou vrstvy.[2] Závislosť intenzity $E(z)$ od polohy je na obr. 3.10. Obrázok ukazuje, že EM vlna s vyššou frekvenciou (menšou vlnovou dĺžkou) tuneluje horšie ako s menšou frekvenciou (väčšou vlnovou dĺžkou).

[1]Predpokladáme, že intenzita elektrického poľa je rovnobežna s rozhraním.

[2]Analogický vzťah odvodíte v kvantovej mechanike pre pravdepodobnosť tunelovania kvantovej častice cez potenciálnu bariéru.



Obr. 3.11. Koeficient prechodu elektromagnetickej vlny cez veľmi tenkú kovovú vrstvu (parameter $\delta = 22$ nm je hĺbka vniku viditeľného a infračerveného svetla do kovu) pre dve frekvencie prechazajúcej vlny. Kovová vrstva hrúbky niekoľkých nanometrov môže veľmi dobre prepúšťať viditeľné svetlo, ale odrážať infračervené. Všimnime si logaritmickú škálu na oboch osiach.

8. Prechod elektromagnetickej vlny kovovou vrstvou
   EM vlna môže cez kovovú vrstvu tunelovať. Koeficient prechodu je opäť daný rovnicou (3.59). Pretože permitivita kovu závisí od frekvencie, bude koeficient prechodu veľmi silne závisieť odd frekvencie prechádzajúcej vlny. Na obrázku 3.11 vidíme koeficient prechodu pre dve vlny, líšiace sa desaťnásobne svojou frekvenciou.

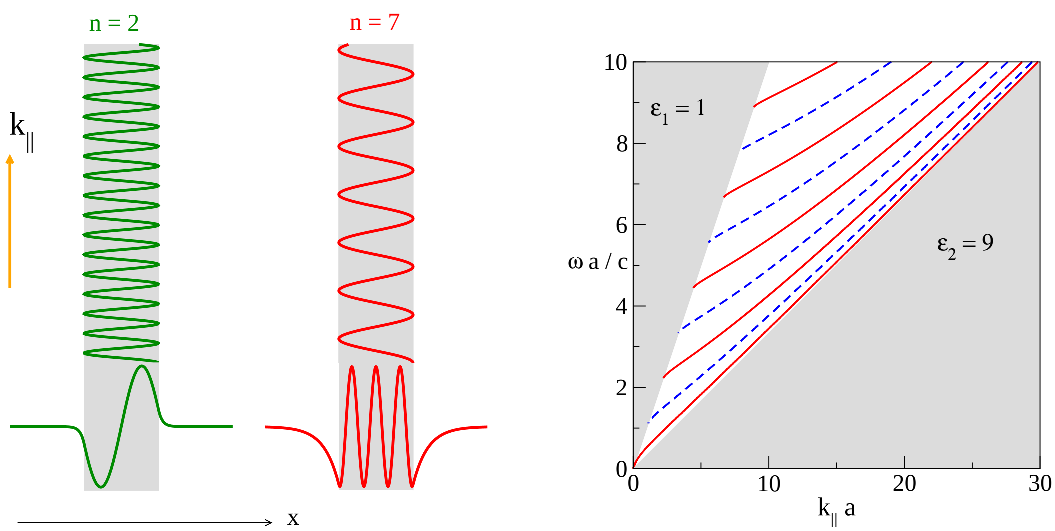
9. **Viazané stavy v tenkej vrstve.**
V tenkej dielektrickej vrstve sa môžu šíriť EM vlny, ktoré nemôžu existovať mimo vrstvy (obr. 3.12). Disperzný vzťah $\omega = \omega(k_\parallel)$ nájdeme opäť zo spojitosti intenzít poľa na hranici vrstvy: Predpokladáme, že vlna v smere osi x exponenciálne klesá. Disperzné vzťahy pre EM vlnu vo vrstve a mimo vrstvy sú

$$\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_2 = k_\parallel^2 + k_{2z}^2 \qquad \text{vo vnútri vrstvy} \tag{3.60}$$

a

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_\parallel^2 - \kappa^2 \qquad \text{mimo vrstvu} \tag{3.61}$$

Závislosť $\omega(k_\parallel)$ je na obr. 3.12. Uväznenie EM vlny vo vrstve s vyšším indexom lomu fyzikálne vysvetľuje šírenie optického signálu v optickom vlákne.



Obr. 3.12. Vľavo: elektromagnetické vlny viazané v tenkej vrstve s permitivitou $\epsilon_2 = 9$ a hrúbkou a. Vektor elektrickej intenzity je rovnobežný s povrchom vrstvy. Profil EM vlny v priečnom smere (os x) ukazuje, že EM vlna exponenciálne klesá mimo vrstvy, a osciluje vo vrstve. Takéto stavy existujú len pre niektoré hodnoty frekvencie a vlnového vektora $k_\parallel$, ukázané na pravom obrázku. Pravý obrázok zobrazuje disperzné vzťahy vlastných stavov EM poľa viazaných v dielektrickej vrstve hrúbky a. Všetky disperzné krivky ležia mimo svetelného kužeľa vonkajšieho prostredia, pretože $k_\parallel > \sqrt{\epsilon_1}\omega/c$. Pre danú frekvenciu ω existuje konečný počet viazaných stavov $N \geq 1$. Stavy sú alebo párne (plná čiara), alebo nepárne (prerušovaná čiara) – tzn. symetrické alebo antisymetrické vzhľadom na rovinu zrkadlenia prechádzajúcu stredom vrstvy.

KAPITOLA 4

Interferencia a koherencia

Literatúra: [3], kap. 5,6

4.1 Interferencia

1. Podstata interferencie – skladanie dvoch vlnení.
   Maxwellove rovnice sú lineárne v intenzitách E, energia je ale kvadratickou funkciou E.

2. **Intenzita** I (pozor na to isté meno pre dve rôzne veličiny!) bude definovaná

   $$I = |E|^2 = \vec{E}^* \cdot \vec{E} \tag{4.1}$$

   a je, súlade so vzťahom (1.73), totožná s Poyntingovým vektorom, až na konštantu $1/(2Z_0)$, ktorú nebudeme uvažovať, pretože všetky interferenčné javy prebiehajú v tom istom prostredí.

3. Súčtom dvoch vlnení v danom bode priestoru $\vec{r}$ je vlnenie s intenzitou elektrického poľa

   $$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t) \tag{4.2}$$

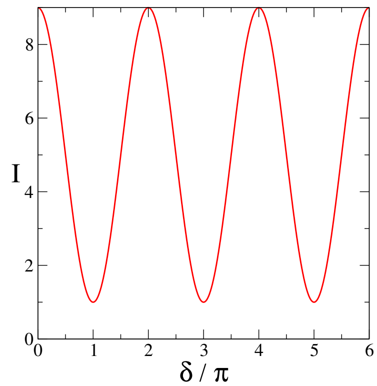
   Predpokladajme, že obe EM vlny majú rovnakú frekvenciu ω.

   $$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \tag{4.3}$$

   $$\vec{E}_2 = \vec{E}_{20} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta)} \tag{4.4}$$

   líšia sa len fázovým faktorom δ. Potom intenzita I výsledného vlnenia je

   $$I = |E|^2 = \vec{E}_1^* \cdot \vec{E}_1 + \vec{E}_2^* \cdot \vec{E}_2 + \vec{E}_1^* \cdot \vec{E}_2 + \vec{E}_2^* \cdot \vec{E}_1 + \tag{4.5}$$



Obr. 4.1. Intenzita $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$ ako funkcia fázového rozdielu δ pre $I_1 = 1$ a $I_2 = 4$, teda $|\vec{E}_{10}| = 1$ a $|\vec{E}_{20}| = 2$. Maximálna hodnota $I_{\max} = |\vec{E}_{10} + \vec{E}_{20}|^2 = 9$, minimálna hodnota $I_{\min} = |\vec{E}_{10} - \vec{E}_{20}|^2 = 1$.

Ak $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$ tak sú posledné dva členy nulové, a $I = I_1 + I_2$ - k interferencii nedochádza. Predpokladajme preto v ďalšom, že

$$\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2 \tag{4.6}$$

a teda nemusíme vo vzťahoch explicitne zdôrazňovať, že ide o vektor. Potom výsledná intenzita má tvar

$$I = |E|^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta \tag{4.7}$$

kde $I_1 = |\vec{E}_{10}|^2$ a $I_2 = |\vec{E}_{20}|^2$. Je teda

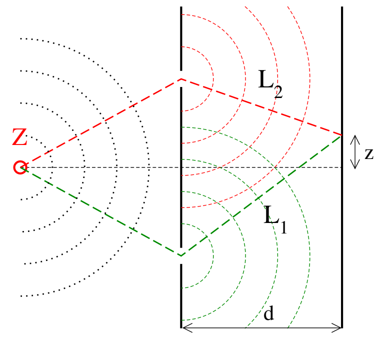
$$I \neq I_1 + I_2 \tag{4.8}$$

Intenzita I ako funkcia fázového rozdielu medzi vlneniami je na obr. 4.1.

4. Interferenciu pozorujeme pri skladaní vlnení s rovnakou frekvenciou. Ideálnym príkladom je skladanie dvoch rovinných vĺn v predchádzajúcom prípade. Podmienkou pozorovania interferencie v reálnom svete je koherentnosť vlnenia, ktorú budeme diskutovať neskôr v časti 4.4 Koherencia.

5. Dve vlnenia, prichádzajúce z rôznych zdrojov, prakticky nikdy neinterferujú, pretože nemajú rovnakú frekvenciu a polarizáciu, a nie sú ani koherentné. Interferenciu ale môžeme pozorovať, ak vlnenie, vychádzajúce z jedného zdroja, rozdelíme na dve (alebo viac) vlnenia, ktoré po rozdelení prejdú rôzne dlhé dráhy a následne spojíme. Ak sa stretnú vo fáze, môžu interferovať. Príkladom interferencie bol prechod EM vlny cez dielektrickú vrstvu v predchádzajúcej kapitole.

6. Interferencia: dvojzväzková (rozdelenie pôvodnej vlny na dve) alebo mnohozväzková (pôvodná vlna sa rozdelí na $N \gg 2$ vlnení, ktoré sa následne interferujú.



Obr. 4.2. Youngov experiment: monochromatická vlna zo zdroja Z sa šíri všetkými smermi; cez prvú prekážku prechádza dvoma malými otvormi, ktoré sa stávajú dvoma novými zdrojmi žiarenia. Pred dopadom na tienidlo vlny prejdú rôzne dráhy L_1 a L_2, preto sú vzájomne posunuté o fázu $\delta = k(L_1 - L_2) = 2\pi(L_2 - L_1)/\lambda$. Výsledná intenzita na tienitku preto závisí od polohy – pozorujeme interferenčný obraz.

7. Youngov experiment na dvojštrbine (obr. 4.2). Ideálny monochromatický zdroj vyžaruje elektromagnetickú vlnu, ktorá prechádza cez dva malé otvory v tienidle. Tieto otvory môžeme považovať za dva ideálne monochromatické zdroje dvoch EM vĺn, ktoré interferujú na druhom tienidle. V závislosti od vzdialenosti zdrojov od daného bodu tienidla pozorujeme na zadnom tienidle oblasti s vysokou, resp. nízkou intenzitou.
   Ak sa majú dve vlny stretnúť v danom bode a v danom mieste. musí byť E_1 z nich vyžiarená skôr, pretože $L_1 > L_2$; časový rozdiel $t_1 - t_2$ spôsobí, že medzi vlnami je fázový rozdiel

$$\delta = \omega(t_1 - t_2) = \omega\frac{(L_1 - L_2)}{c} = k(L_1 - L_2) \tag{4.9}$$

$$\delta = 2\pi\frac{L_1 - L_2}{\lambda} \tag{4.10}$$

   Fázový rozdiel medzi vlnami teda závisí od pomeru rozdielu dráh k vlnovej dĺžke.

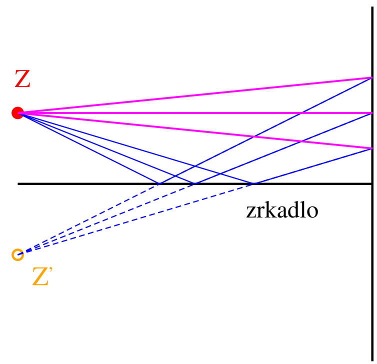
   Intenzitu v danom mieste nájdeme zo vzťahu

$$I(z) = 2I_1(1 + \cos\delta) \tag{4.11}$$

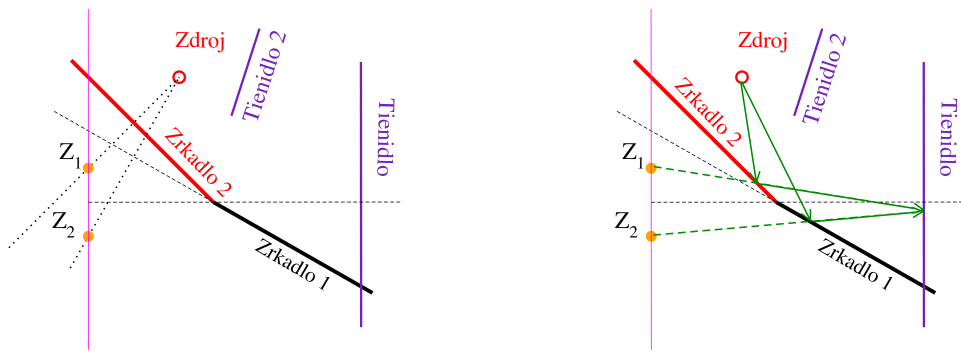
   pretože oba zdroje majú rovnakú intenzitu. Intenzita je najväčšia, ak $L_2 - L_1 = m\lambda$, teda ak sa vlnenia stretnú vo fáze. Ak $L_2 - L_1 = (m + 1/2)\lambda$, vlnenia sa stretnú v protifáze a intenzita je nulová ($\cos\delta = -1$).

8. Iné príklady dvojzväzkovej interferencie: princíp je ten istý, ako pri Youngovom experimente: je treba nájsť mechanizmus ako vytvoriť dva zdroje rovnakého vlnenia. Možností je veľa, napríklad

   - Lloydovo zrkadlo (obr. 4.3)

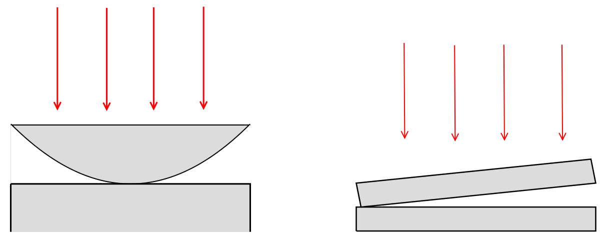


Obr. 4.3. Lloydovo zrkadlo vytvára zdanlivý obraz zdroja Z; na tienidle vpravo vzniká interferenčný obraz, pretože lúče odrazené od zrkadla sa chovajú tak, ako keby boli vyžiarené zo zdroja Z'. Princíp interferencie je ten istý, ako pri Youngovej interferencii.



Obr. 4.4. Vľavo: Fresnelove zrkadlá: dve zrkadlá, ktoré zvierajú medzi sebou malý uhol. Zdroj svetla sa zobrazí v dvoch zdrojoch Z_1 a Z_2. Svetlo vychádzajúce zo zdroja, sa odráža od dvoch zrkadiel a dopadá na tienidlo ako keby bolo vyžiarené zo zdrojov Z_1 a Z_2. Na tienidle vytvára interferenčný obraz rovnaký ako v prípade Youngovej interferencie. Úlohou Tienidla 2 je eliminovať lúče, vychádzajúce zo zdroja, ktoré sa neodrážajú od žiadneho zo zrkadiel. Pravý obrázok ukazuje dva lúče, vychádzajúce zo zdroja, ktoré po odraze od zrkadiel spolu interferujú na tienidle.

- Fresnelove zrkadlá (obr 4.4)
  Odrazmi od dvoch zrkadiel "imitujú" Youngov interferenčný experiment; na rozdiel do neho ale využijú celú energiu zdroja (v Youngovom experimente sa väčšina energie odrazí od nepriepustnej prekážky a k interferencii neprispieva).
- Interferencia na kline a na Newtonových sklách (obr 4.5)
- Interferencia v prírode: tenká mydlová blana, tenká vrstva oleja na vode, motýlie krídlo.
- Interferencia na tenkej vrstve (pozri časť 4.2)



Obr. 4.5. Vľavo: Newtonove sklá; interferencia nastáva na vzduchovej vrstve, ktorej hrúbka závisí od vzdialenosti od stredu. Pozorujeme interferenčné krúžky. Pravý obrázok ukazuje interferenciu na tenkej vzduchovej vrstve, vytvorenej sklenenou doskou, položenou na vodorovnej podložke a na jednej strane podloženou (napr. zrnkom prachu). Dopadajúca vlna má vlnovú dĺžku λ. Čo sa stane, ak na takéto systémy dopadá biele svetlo?

4.2 Interferencia na tenkej vrstve

1. Skladanie dvoch vlnení: v praxi nám stačí uvažovať len prvé dva príspevky geometrického radu (obr. 4.6). Podmienka zosilnenia odrazeného vlnenia závisí od povahy rozhrania na spodnej strane tenkej vrstvy. Predpokladajme, že vrstva leží na materiáli s indexom lomu $n_s > n$. Potom amplitúdy odrazu od oboch rozhraní majú rovnaké znamienko. Predpokladajme aj $n_0 = 1$. Z obrázku 4.6 vidíme, že vlny E_1 a E_2 sa stretnú v bode B vo fáze, ak platí

$$kb + 2k_2 \frac{\ell}{\cos\theta_2} = 2m\pi, \qquad m = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4.12}$$

kde $k_2 = nk$ a k je vlnový vektor v priestore nad vrstvou. Z trigonometrie máme $b = 2a\sin\theta_1$, $a = \ell \tan\theta_2$. Po dosadení do rovnice 4.12 dostaneme

$$2k\ell\sin\theta_1 \tan\theta_2 - 2kn\frac{\ell}{\cos\theta_2} = 2m\pi \tag{4.13}$$

a po úprave

$$2k\ell\left[\sin\theta_1\sin\theta_2 - n\right] = 2m\pi\cos\theta_2 \tag{4.14}$$

Zo Snellovho zákona dostaneme $\sin\theta_1 = n\sin\theta_2$ ($n_0 \equiv 1$), takže

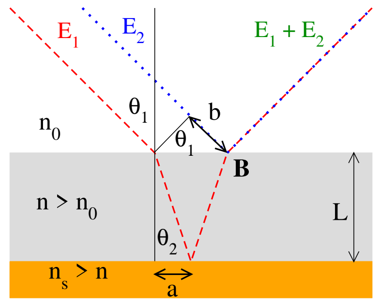
$$kn\cos\theta_2 = m\pi \tag{4.15}$$

resp.

$$k_{2z}\ell = m\pi \tag{4.16}$$

lebo $k_{2z} = k_2\cos\theta_2$. V niektorých knihách ju prepíšu do tvaru

$$\Delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n\ell\cos\theta_2 = 2m\pi \tag{4.17}$$



Obr. 4.6. Interferencia na tenkej vrstve hrúbky ℓ s indexom n. Vrstva je nanesená na podložke s indexom lomu $n_2 > n$. Ukázané sú dva dopadajúce lúče, ktoré po odraze interferujú.

Analogicky, podmienka zoslabenia odrazenej vlny je

$$2k_{2z}\ell = (2m + 1)\pi \tag{4.18}$$

Ak uvažujeme kolmý dopad, $\theta_1 = \theta_2 = 0$, dostaneme pre $m = 0$ podmienku minimálneho odrazu z rovnice 4.18

$$k_2\ell = \frac{\pi}{2} \tag{4.19}$$

Hrúbka vrstvy je preto

$$\ell = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{\lambda_2}{4} \tag{4.20}$$

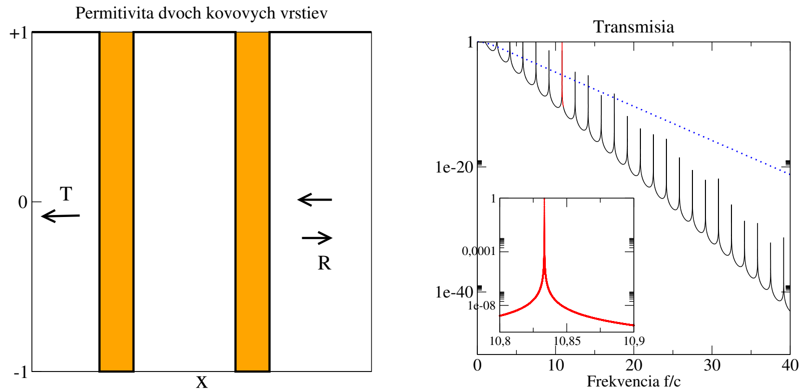
Odtiaľ názov "štvrťvlnová platnička". Pre túto hrúbku vrstvy je odraz od vrstvy minimálny.

2. **Antireflexné vrstvy**
Minimalizácia odrazu od rozhrania dvoch materiálov s indexami lomu n_0 a n_s.
Na materiál s indexom lomu n_s nanesieme tenkú vrstvu s indexom lomu n: $n_0 < n < n_s$.
Aby bol odraz od rozhrania minimálny, potrebujeme, aby:
(1) hrúbka vrstvy $\ell = \lambda_2/4$, aby vlnenie odrazené od zadnej strany vrstvy bolo v protifáze s vlnením odrazeným od prednej strany (rovnica 4.20);
(2) vzťah medzi indexami lomu bol

$$n = \sqrt{n_0 n_s} \tag{4.21}$$

aby obe odrazené vlnenia mali približne rovnakú amplitúdu. Naozaj, pre najjednoduchší prípad kolmého dopadu je vlna odrazená od predného okraja tenkej vrstvy

$$E_1 = r_1 E_0, \qquad r_1 = \frac{n_0 - n}{n_0 + n} \tag{4.22}$$



Obr. 4.7. Prechod EM vlny cez dve tenké kovové vrstvy. Štruktúra je na ľavom obrázku. Šípky ukazujú dopadajúcu, odrazenú a prejdenú vlnu. Na pravom je koeficient prechodu ako funkcia frekvencie EM vlny. (Vertikálna os je logaritmická!). Koeficient prechodu je počítaný numericky. Pravý obrázok ukazuje, že Transmisia exponenciálne klesá, ale pre vybrané rezonančné frekvencie prudko narastá až dosahuje hodnotu $T = 1$. Tieto maximá sú veľmi úzke (ich šírka je daná parametrami štruktúry, napr. hrúbkou kovových vrstiev). Preto sa numericky nepodarilo dosiahnuť maximálnu hodnotu (jedno maximum je ukázané na vloženom obrázku). Pre porovnanie: modrá bodkovaná čiara je prechod cez jednu kovovú vrstvu. Zdroj: Pokročilé programovanie, prednášky pre 2r. bc fyzika.

a vlna odrazená od spodného okraja vrstvy

$$E_2 \approx r_2 E_0, \qquad r_2 = \frac{n - n_s}{n + n_s} \tag{4.23}$$

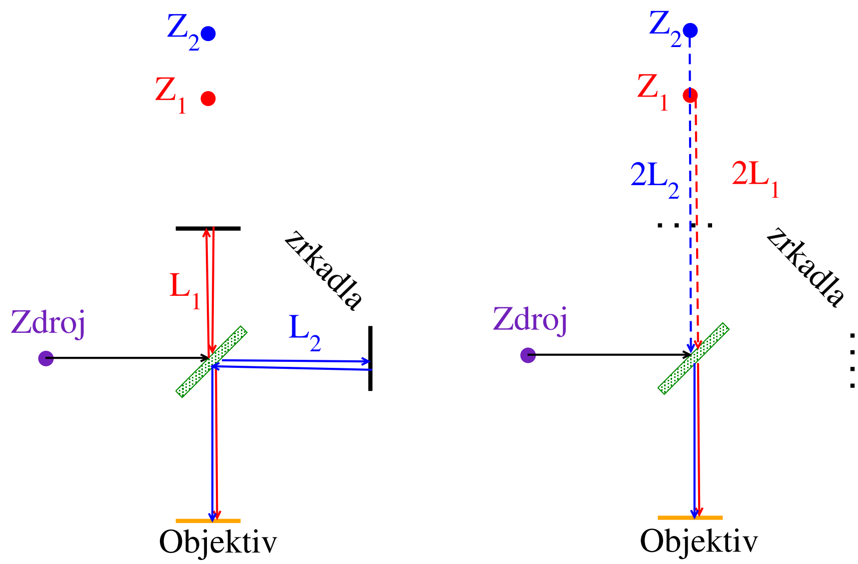
(E_0 je amplitúda dopadajúcej vlny). Obe odrazené amplitúdy sú rovnaké, ak $r_1 = r_2$ z čoho plynie vzťah (4.21).

Využitie antireflexných vrstiev: o.i. v každej optickej sústave – typický odraz od povrchu skla je 4% - v prípade, že svetlo prechádza desiatimi šošovkami, neprešlo by takouto sústavou skoro nič.

4.3 Interferometre

1. **Fabry-Perotov rezonátor**
   Interferencia na dvoch kovových vrstvách (obr. 4.7). V experimente sú kovové vrstvy naparené na sklených podložkách. Svetlo, ktoré zavedieme medzi kovové vrstvy, sa od nich bude mnohonásobne odrážať; jednotlivé zložky budú interferovať, a pre vhodnú frekvenciu f (resp. vlnový dĺžku) dôjde k dokonalej transmisii ($T = 1$) podobne ako na tenkej vrstve. Výpočet je o niečo zložitejší, efekt sa dá ľahko dokázať numerickým riešením vlnovej rovnice.

2. **Michelsonov interferometer**
   Pozri obrázok 4.8. Svetlo zo zdroja sa rozdelí na polopriepustnej vrstve. Dva lúče sa



Obr. 4.8. Michelsonov interferometer. Vľavo: Koherentné svetlo zo zdroja Z dopadá na polopriepustnú platňu, polovica sa odráža a polovica prechádza. Oba lúče sa odrazia od kolmých zrkadiel, prechádzajú polopriepustnou platňou a interferujú. Ak má dopadajúci lúč cylindrickú symetriu, v objektíve pozorujeme interferenčné krúžky, ako keby oba interferujúce lúče prichádzali zo zdrojov Z_1 a Z_2 (pravý obrázok).

odrážajú od kolmých zrkadiel a po prechode polopriepustnou vrstvou interferujú. Fázový rozdiel medzi lúčmi je

$$\delta = 2\pi \frac{2L_1 - 2L_2}{\lambda} \tag{4.24}$$

pretože lúče pred interferenciou prešli dráhy $2L_1$ a $2L_2$ (dráha lúča 2 v polopriepustnej vrstve sa kompenzujú dodatočnou vrstvou, ktorú musí prekonať lúč 1, ale pre jednoduchosť nie je na obr. 4.8 nakreslená).
Interferenčný obraz vyzerá rovnako, ako keby lúče vychádzali zo zdrojov Z_1 a Z_2 (pravý obrázok). Ak má pôvodný lúč cylindrickú symetriu, uvidíme v objektíve interferenčné krúžky.

3. **Michelsonov-Morleyho experiment**. Neexistencia éteru.
   Michelsonov experiment mal koncom 19. storočia dokázať existenciu éteru ako média, ktoré vypĺňa celý Vesmír, je nepohyblivé (definuje tak absolútnu vzťažnú sústavu, voči ktorej sa všetko pohybuje). Éter mal byť prostredím, ktoré kmitá pri prechode EM vĺn, podobne ako kmitá materiálové prostredie pri prechode akustických vĺn. Experiment prebiehal pred formuláciou teórie relativity, v časoch, keď nebol známy postulát o invariantnosti rýchlosti svetla. Preto sa pri jeho analýze skladali rýchlosti tak, ako v klasickej mechanike. Predpokladajme, že ramená sú rovnako dlhé: $L_1 = L_2$. Ak experiment prebieha na Zemi, ktorá sa pohybuje rýchlosťou $v = 30$ km/s v smere lúča 2, potom by sme mali pozorovať interferenčný obraz, pretože čas, ktorý svetlo potrebuje na prekonanie

vzdialenosti k zrkadlám a spať je rôzny: pre zrkadlo 1

$$\tau_1 = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{4.25}$$

(rýchlosť svetla k zrkadlu a späť je len $c\sqrt{1-v^2/c^2} < c$), a pre zrkadlo 2

$$\tau_2 = \frac{2L}{c}\frac{1}{1-v^2/c^2} \tag{4.26}$$

lebo rýchlosť svetla jedným smerom je $c+v$ a opačným smerom $c-v$. Fázový rozdiel medzi oboma vlnami je preto

$$\delta = \omega(\tau_1 - \tau_2) \tag{4.27}$$

Pretože $v \ll c$, môžeme tento výsledok rozvinúť do Taylorovho radu v mocninách v/c a dostaneme

$$\delta = \omega(\tau_1 - \tau_2) \approx 2\pi\frac{2L}{\lambda}\frac{v^2}{c^2} \tag{4.28}$$

Ak sa interferometer otočí o $\pi/2$ (teda rameno 1 bude orientované v smere pohybu Zeme), ramená si vymenia úlohu, fázový rozdiel zmení znamienko, čo následne zmení interferenčný obraz v objektíve. Aby bol efekt merateľný, musia byť ramená interferometra dostatočne dlhé, napr. $L = 10$ m.
Výsledok experimentu bol negatívny, čo spochybnilo existenciu éteru. Historicky ide o jeden z najdôležitejších fyzikálnych experimentov.

4.4 Koherencia

1. **Koherencia**
   Žiadny zdroj elektromagnetickej vlny nevyžaruje kontinuálne. Napr. atóm vyžaruje len po dobu cca 10^{-8} s (pozri časť 7.1). Vyžiarená vlna preto nie je monochromatická. Za takú ju môžeme považovať len na krátkych vzdialenostiach ℓ_c (koherenčná dĺžka, resp. počas krátkej doby τ_c (koherenčný čas).

   $$\ell_c = c\tau_c \tag{4.29}$$

2. Konečný koherenčný čas znamená neurčitosť vo frekvencii:

   $$\Delta f = \frac{1}{\tau_c} \tag{4.30}$$

   a neurčitosť vo vlnovej dĺžke. Koherenčnú dĺžku môžeme vyjadriť pomocou vlnovej dĺžky λ a jej neurčitosti $\Delta\lambda$:

   $$\ell_c = c\tau_c = \frac{c}{\Delta f} = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)^2} \tag{4.31}$$

3. Nutná podmienka interferencie dvoch vlnení s vlnovou dĺžkou λ: rozdiel dráh, ktoré vlnenia prejdú pred interferenciou musí byť menší ako korelačná dĺžka ℓ_c:

$$\Delta\ell \ll \ell_c \tag{4.32}$$

Napr. v Michelsonovom interferometri (obr. 4.8) musí byť $2(l_1 - L_2) < \ell_c$. Interferenciu je ale možné merať pre ľubovoľnú dĺžku ramien – pozri aj záver tejto časti.

4. Interferencia je možná len vtedy, keď sa skladajú dve koherentné vlnenia – preto sa v interferenčných experimentoch delí vychádzajúce vlnenie na dve časti, ktoré následne interferujú. Pretože žiadny zdroj nevyžaruje monochromatickú rovinnú vlnu, musia tieto dve vlny interferovať skôr, ako sa vplyvom dekoherencie "rozfázujú". Vzhľadom na to, že v interferometroch prejdú dva lúče rôznu dráhu, skladajú sa na tienidle dve vlny posunuté v čase o hodnotu δt:

$$E_1 = Ee^{-i[\omega t + \phi(t)[}, \qquad E_2 = Ee^{-i[\omega(t+\delta t)+\phi(t+\delta t)]} \tag{4.33}$$

Potom $I = |E_1 + E_2|^2$ vyjadríme v tvare

$$I = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0 I_0}\ \mathrm{Re}\ \left[\ e^{i\omega\delta t + i(\phi(t+\delta t)-\phi(t))}\right] \tag{4.34}$$

kde $I_0 = |E|^2$. (Pre jednoduchosť sme predpokladali, že obe vlny majú tú istú amplitúdu E.) Funkcia

$$\gamma(t) = e^{i\omega\delta t} e^{i[\ \phi(t+\delta t)-\phi(t)]} = e^{i\omega\delta t}\Gamma(\delta t) \tag{4.35}$$

závisí od δt, aj do času t. Pretože meranie trvá istý čas $T \gg \delta t$, hľadajme strednú hodnotu

$$\Gamma(\delta t) = \frac{1}{T}\int_0^T dt e^{i[\ \phi(t+\delta t)-\phi(t)]} \qquad (T \gg \tau_c) \tag{4.36}$$

Ak predpokladáme, že $\Gamma(\delta t)$ je reálna, potom výslednú intenzitu vyjadríme v tvare

$$I = I_0 + I_0 + 2I_0\Gamma(\delta t)\cos\omega\delta t \tag{4.37}$$

Ak $\Gamma \equiv 1$, dostaneme rovnicu (4.11) pre interferenciu v ideálnom prípade dokonale koherentných vlnení (rovinných vĺn). Ak $\Gamma \approx 0$, interferencia sa stráca. Funkcia Γ teda meria mieru koherencie dvoch vlnení. Dá sa ukázať, že v reálnych situáciách

$$\Gamma(\delta t) \qquad \text{klesá rýchlo do nuly, keď} \quad \delta t > \tau_c \tag{4.38}$$

Nekoherentné vlnenia preto neinterferujú (preto neinterferuje svetlo sviečky, lampa apod.).

5. Meranie koherencie. Z rovnice (4.37) vidíme, že I nadobúda hodnoty medzi maximálnou hodnotou $I_{\max}$ a minimálnou hodnotou $I_{\min}$.

$$I_{\max} = 2I_0(1 + \Gamma(\delta t)) \tag{4.39}$$

$$I_{\min} = 2I_0(1 - \Gamma(\delta t)) \tag{4.40}$$

a teda

$$\Gamma(\delta t) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \tag{4.41}$$

čo umožňuje experimentálne stanoviť mieru koherencie.

6. Koherenčné dĺžky známych zdrojov svetla:

slnečné svetlo	$l_c \approx 800$ nm
LED	$l_c \approx 20\ \mu$m
sodíková lampa	$l_c \approx 600\ \mu$m
ortuťová výbojka	$l_c \approx 1$ cm
He-Ne laser	$l_c \approx 300$ m

Koherenčná dĺžka je daná fyzikálnymi procesmi, pri ktorých svetlo vzniká – viac sa dozvieme v časti 7.1.

7. Krátka koherenčná dĺžka kladie veľké nároky na konštrukciu interferometrov: rozdiel dráh dvoch vlnení musí byť

$$|L_2 - L_1| < l_c \tag{4.42}$$

Pred konštrukciou laserov boli maximálne dosažiteľné koherenčné dĺžky rádov milimetrov, pri čom dĺžky ramien L_1, L_2 dosahovali desiatky metrov. Preto potrebujeme koherentné zdroje svetla.
Podmienka (4.42) vysvetľuje, prečo pozorujeme interferenciu len na tenkých vrstvách (a nie napr. na obločnom skle hrúbky niekoľko mm).

8. Interferenčný obraz od "veľkých" zdrojov - **priestorová koherencia**.
"Veľký zdroj" (napr. povrch Slnka, hviezdy) pozostáva z veľkého počtu bodových zdrojov. Pre každý bodový zdroj môžeme uvažovať interferenčný experiment. Svetlo prichádzajúce z hviezdy môžeme podrobiť Youngovmu interferenčnému experimentu a pozorovať interferenciu. Podmienkou interferencie je, že interferenčné obrazy jednotlivých zdrojov sa nebudú prekrývať. Príklad je ukázaný pre dva zdroje na obr. 4.9. Pre $\theta \ll 1$ môžeme aproximovať

$$L_2 - L_1 = \sqrt{(a/2 + s)^2 + r^2} - \sqrt{(a/2 - s)^2 + r^2} \tag{4.43}$$

Za predpokladu $r \gg a$, $r \gg s$ dostaneme

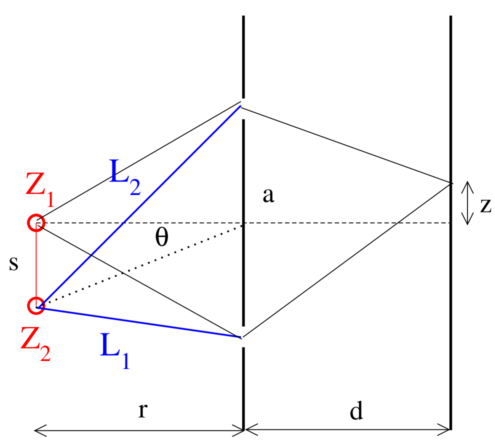
$$L_2 - L_1 \approx \frac{as}{r} \tag{4.44}$$

(Taylorov rozvoj). Interferenčný obraz vidíme, ak $L_2 - L_1 < \lambda/2$, teda ak

$$a < \frac{1}{2}\frac{r}{s}\lambda \tag{4.45}$$

Povrch hviezdy pozostáva z veľkého množstva bodových zdrojov, čo ale len zmení koeficient 1/2 na pravej strane rovnice 4.45. Je preto možné z pozorovania interferencie odhadnúť rozmer hviezdy s, ak poznáme jej vzdialenosť r: stačí zväčšovať vzdialenosť štrbín a dovtedy, kým sa interferencia nestratí.
Príklad: Slnko má priemer $1,4 \times 10^6$ km, vzdialenosť Slnko-Zem je 150×10^6 km, takže $r/s \approx 115$. Interferenciu slnečného svetla teda “vidíme” v Youngovom experimente, v ktorom sú štrbiny vzdialené menej ako 100λ. V prípade vzdialených hviezd ale táto vzdialenosť môže byť rádovo metre (stelárny Michelsonov interferometer [9]).

9. Holografia pozri [3].



Obr. 4.9. Youngov experiment s dvoma zdrojmi Z_1 a Z_2, ktoré vidíme pod priestorovým uhlom θ. Predpokladáme, že $\theta \ll 1$ (čo sa do obrázku ťažko nakreslí). Ak pozorujeme interferenciu vo vzdialenosti z od osi, vidíme, že optické dráhy zo zdrojov Z_1 a Z_2 sa líšia len rozdielom $L_2 - L_1$. Ak $L_2 - L_1 = \lambda/2$, potom interferenčné obrazy vytvorené jednotlivým zdrojmi nebudú pozorovateľné, pretože maximum jedného bude tam, kde minimum druhého. Podmienka pozorovania interferencie je preto $L_2 - L_1 < \lambda/2$.

KAPITOLA 5

Difrakcia

Literatúra: [3], kap. 8, [4], kap. 4, [8]

5.1 Všeobecné poznámky

1. **Bodový zdroj žiarenia**
   Bodový zdroj vyžaruje rovnako do všetkých smerov. Vyžiarenú vlnu nájdeme riešením vlnovej rovnice vo sférických súradniciach. Vďaka symetrii zdroja bude vlna funkciou len vzdialenosti r od zdroja. Riešenie má tvar

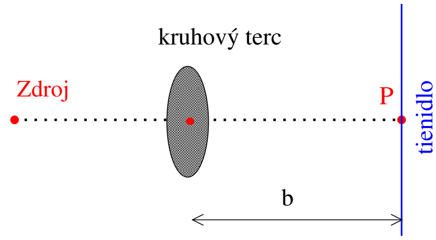
   $$E(r,t) = \frac{E_0}{r} e^{i[kr-\omega t]} \tag{5.1}$$

   (guľové vlny). Vlna "odchádza" zo stredu (zo zdroja) a osciluje s vlnovou dĺžkou $\lambda = 2\pi/k$. Amplitúda vlny klesá $E(r) \sim 1/r$, pretože tok energie, ktorá odchádza zo zdroja, nezávisí od vzdialenosti r, ale plocha, cez ktorú tok prechádza, rastie ako $4\pi r^2$. Poyntingov vektor (energia cez jednotkovú plochu za jednotku času) preto klesá ako $1/r^2$.

2. **Huyghensov princíp**
   Vlna v čase t dosiahne nejakú plochu (vlnoplochu). Každý bod tejto vlnoplochy sa stáva novým zdrojom vlnenia. Vlnoplochu v čase $t + \Delta t$ získame zložením ich vlnoplôch.

3. **Hughensov - Fresnelov princíp**
   Nové vlnenia navzájom interferujú, pretože ich okrem amplitúdy charakterizuje aj fáza.

4. **Kirchhoffov princíp**
   Predpoklad, že tienidlo len tieni – teda samotné nevyžaruje ani nijako neovplyvňuje šírenie pôvodného svetla.



Obr. 5.1. Schéma Fresnelovej difrakcie na kruhovom tienidle. Medzi zdroj a pozorovateľa v bode P je vložená kruhová prekážka. Úlohou je nájsť intenzitu E na rovinnom tienidle za terčom. Fresnel ukázal, že na tienidle vznikne sústava koncentrických svetelných kruhov ako dôsledok difrakcie svetla na tienidle. Arago ukázal, že pri tejto difrakcii bude v bode P vždy pozorovaná svetlá škvrna (Aragova škvrna), nezávisle od polomeru a od polohy tienidla. Vysvetlenie pôvodu Aragovej škvrny je na obr. 5.7.

5. **História** Fresnel difrakciou svetla na kruhovom terčíku dokázal vlnovú podstatu svetla (obr. 5.1, začiatok 19. storočia).

6. **Geometria difrakcie**

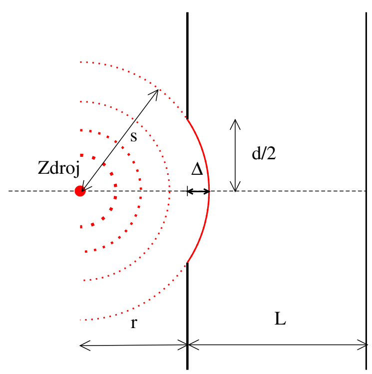
   Svetlo zo zdroja je pozorované na tienidle. Ak medzi zdroj a pozorovateľa umiestnim prekážku (tienidlo s otvorom, alebo terč, pozorujem difrakčné javy.

   Ak zdroj vyžaruje guľovú vlnu, tak sa do otvoru "zmestí" len časť vlnoplochy s polomerom s (obr. 5.2). Parameter Δ na obrázku definuje vzdialenosť medzi rovinou otvoru a guľovou vlnoplochou:

$$s \;= r + \Delta \tag{5.2}$$

   Z Pytagorovej vety dostaneme

$$s^2 = r^2 + (d/2)^2 \tag{5.3}$$



Obr. 5.2. Geometrické usporiadanie, na ktorom pozorujeme difrakciu, obsahuje štyri dĺžkové škály: okrem vlnovej dĺžky λ veľkosť otvoru v prekážke d, vzdialenosť zdroja od prekážky r a L - vzdialenosť prekážky od tienidla, na ktorom pozorujeme difrakčný obrazec. Fraunhoferova difrakcia predpokladá, že r a L sú "nekonečne ďaleko", preto dopadajúcu vlnu môžeme považovať za rovinnú, a prechádzajúce lúče považujeme za rovnobežné.

Ak $s \gg \Delta$, dostaneme z týchto rovníc približný vzťah

$$\Delta \approx \frac{(d/2)^2}{r} \tag{5.4}$$

7. Fresnelovu difrakciu pozorujeme, ak zdroj svetla aj tienidlo sú natoľko blízko, že platí

$$\Delta \sim \lambda \tag{5.5}$$

   Difrakčný obraz závisí od polohy tienidla, posunutím tienidla napr. ku zdroju sa difrakčný obraz podstatne zmení.

8. Fraunhoferova difrakcia je zjednodušený opis difrakcie v limite

$$\Delta \ll \lambda \tag{5.6}$$

   Zdroj svetla aj tienidlo sú ďaleko od otvoru (*de facto* v nekonečne). Vlna prichádzajúca zo zdroja sa dá považovať za rovinnú.

9. Fresnelovo číslo (obr. 5.2).

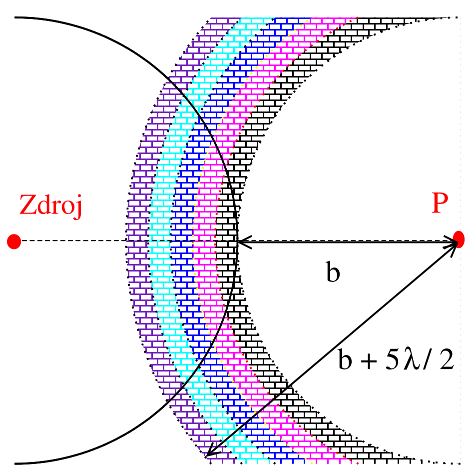
$$N_F = \frac{(d/2)^2}{r\lambda} \tag{5.7}$$

   d. . . rozmer otvoru, r . . . vzdialenosť zdroja svetla od otvoru, λ. . . vlnová dĺžka. Fresnel: $N_F \sim 1$, Fraunhofer: $N_F \ll 1$.

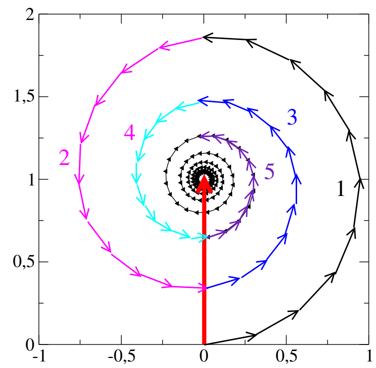
5.2 Fresnelova difrakcia

1. **Fresnelova difrakcia na otvore a na kruhovom terčíku**
   Ak medzi zdroj a tienidlo umiestnime kruhový terč (obr. 5.1) alebo prekážku s kruhovým otvorom (obr. 5.2), pozorujeme na tienidle difrakčný obraz – sústredné svetlé a tmavé kružnice. Fresnel prezentoval takýto experiment ako dôkaz vlnovej povahy svetla (1816). Pre kvantitatívny opis difrakcie Fresnel zaviedol **Fresnelove zóny** (obr. 5.3) ktoré umožňujú nájsť intenzitu difragovaného svetla na tienidle. Príkladom takej konštrukcie je Cornuova špirála (obr. 5.4).

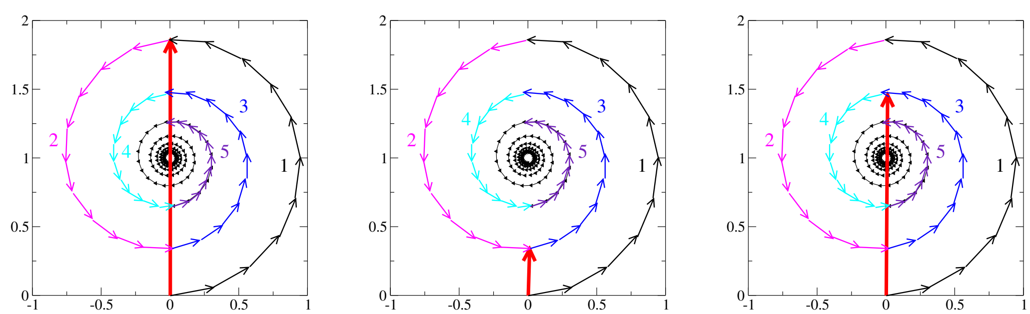
2. **Fresnelova difrakcia na kruhovom otvore**
   Ak je v nepriehľadnej prekážke kruhový otvor, bude intenzita v bode P závisieť od toho, koľko Fresnelových zón sa do otvoru "zmestí". Intenzitu v bode P nájdeme z Cornuovej špirály, na ktorej sčítame len príspevky z tých zón, ktoré nie sú zakryté tienidlom. Napríklad ak otvor prepúšťa iba príspevky od prvej Fresnelovej zóny,bude intenzita E v bode daná červenou šípkou na ľavom obr. 5.5. Porovnaním z obrázkom 5.4 vidíme, že intenzita je približne dvakrát väčšia, ako v prípade, keď medzi zdrojom a bodom P nie je žiadna prekážka.
   Ak zmeníme polohu prekážky, môže sa do otvoru vojsť viac Fresnelových zón. Napr. ak sa do otvoru zmestia len prvé dve Fresnelove zóny, intenzita poľa v bode P bude veľmi malá (prostredný obr. 5.5) Ak sa do otvoru zmestia tri Fresnelove zóny, intenzita opäť narastie.. Ak teda prekážkou pohybujeme smerom ku zdroju, pozorujeme v bode P oscilácie intenzity podľa toho, či sa do otvoru zmestí nepárny alebo párny počet Fresnelových zón [4].



Obr. 5.3. Fresnelove zóny. Čierna (pol)kružnica je vlnoplocha vychádzajúca zo zdroja. Difrakciu pozorujeme v bode P. Vlnoplochu rozdelíme na časti, ktorých vzdialenosť od bodu P je b, $b+\lambda/2$, $b+\lambda\ldots$. Motivácia k takejto konštrukcii je v tom, že vlnenie, ktoré z danej Fresnelovej zóny dopadne do bodu P bude mať opačné znamienko, ako vlnenia prichádzajúce zo susedných zón, pretože fázový rozdiel medzi nimi je π (obr. 5.4). Nakreslených je prvých 5 Fresnelových zón, ohraničených kružnicami s polomerom $b+n\lambda/2$. Difrakčný obraz bude závisieť od toho, koľko Fresnelových zón sa zmestí do kruhového otvoru, resp. koľko zón bude zakrytých tienidlom.



Obr. 5.4. Cornuova špirála umožňuje graficky "vypočítať" intenzitu vlny v bode P. Ak uvažujeme intenzitu $\vec{E}$ ako komplexnú veličinu, môžeme ju znázorniť vektorom v komplexnej rovine. Dĺžka vektora definuje absolútnu hodnotu intenzity, jeho smer je daný fázou. Intenzitu pochádzajúcu z dvoch častí vlnoplochy potom vieme znázorniť ako súčet zodpovedajúcich intenzít, teda ako súčet dvoch vektorov. Ukázaný je prípad, kedy medzi zdrojom a P nie je žiadna prekážka. V komplexnej rovine sa sčítavajú príspevky od jednotlivých Fresnelových zón (odlíšené farebne). Príspevok jednej zóny nájdeme integráciou príspevkov, prichádzajúcich z jej povrchu; na obrázku sú tieto príspevky vyznačené malými šípkami. Ich dĺžka a smer sa menia, lebo príspevky od jednotlivých častí majú inú fázu. Výsledná intenzita je ukázaná červenou šípkou.

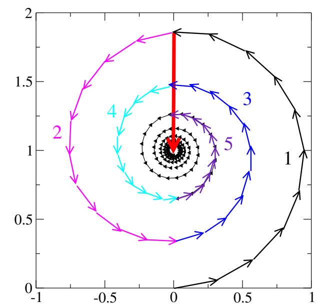


Obr. 5.5. Grafický výpočet intenzity v bode P pre prípad, kedy sa otvoru zmestí (zľava doprava) len prvá, prvé dve, a prvé tri Fresnelove zóny. Výsledná intenzita je daná červenou šípkou.

Ak je prekážka tesne pred zdrojom, netieni už žiadnu Fresnelovu zónu a intenzita v bode P je ukázaná na obr. 5.4.

3. **Fresnelova difrakcia na kruhovom terči**
Kruhová prekážka (obr. 5.1) zakryje určitý počet Fresnelových zón. Výslednú intenzitu v bode P dostaneme opäť z Cornuovej špirály. Na rozdiel od predchádzajúceho prípadu s otvorom ale nebudeme uvažovať príspevky prvých zón, ktoré sú zakryté. Napríklad na obr. 5.6 je ukázaná intenzita v bode P, ak medzi ním a zdrojom je kruhová prekážka, ktorá zakryla presne prvú Fresnelovu zónu. Porovnaním s pravým obrázkom vidíme, že intenzita je v absolútnej hodnote takmer tá istá, ako keby tam prekážka vôbec nebola.

4. **Aragova škvrna**
Prekvapujúcim artefaktom Fresnelovej difrakcie na kruhovom terči je svetlá škvrna, po-



Obr. 5.6. Červená šípka ukazuje intenzitu v bode P pre prípad, kedy je medzi zdrojom a pozorovateľom umiestnená kruhová prekážka, ktorá zakrýva presne prvú Fresnelovu zónu.

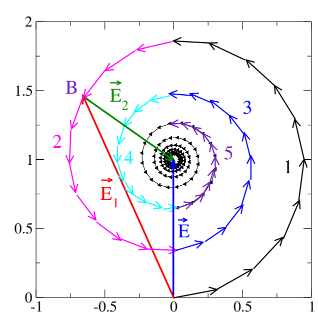
zorovanná pri difrakcii na kruhovom terči priamo v bode P, teda v mieste, kde by sme čakali najhlbší tieň. Príkladom je intenzita na obr. 5.6. Ako vidíme na obr. 5.7, intenzita poľa v bode P (znázornená na obrázku zelenou šípkou) nie je nikdy malá. Škvrna sa teda objaví pre ľubovoľnú polohu kruhového tienidla.

5. **Babinetov princíp**
   Podľa Babinetovho princípu pre intenzitu poľa v bode P platí

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \tag{5.8}$$

kde $\vec{E}_1$ v bode P pozorovaná pri difrakcii na otvore ktorý zodpovedá veľkosťou a tvarom terčíku, $\vec{E}_2$ v bode P pozorovaná pri difrakcii na terčíku a $\vec{E}$ je intenzita, akú by sme namerali, keby medzi zdrojom a tienidlom nebola žiadna prekážka.

Grafické odvodenie Babinetovho princípu vidíme na obr. 5.7. Pre výpočet E_1 sčítavame len príspevky od počiatku Cornuovej špirály do bodu B. Pre intenzitu na terčíku sčítame príspevky od bodu B do konca špirály. Ich súčet, prirodzene dá vektor smerujúci od

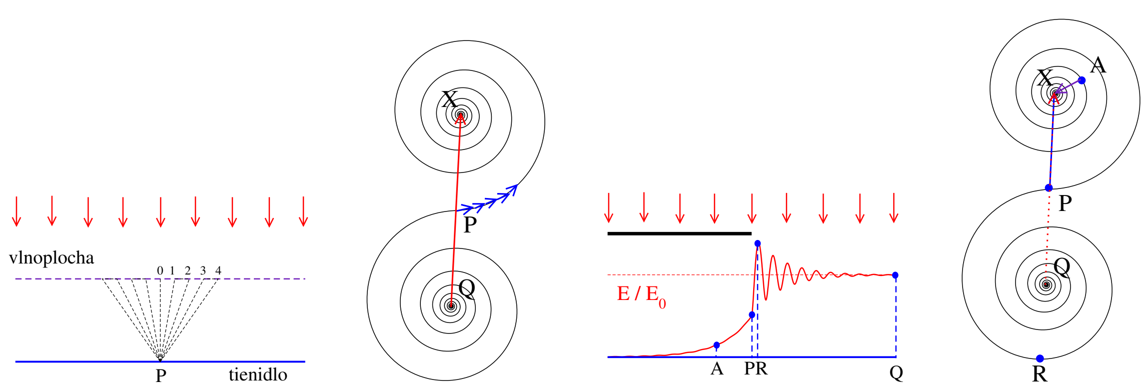


Obr. 5.7. Babinetov princíp: Červená šípka je výsledná intenzita $\vec{E}_1$ pre difrakciu na otvore. Modrá šípka je intenzita $\vec{E}_2$ pre difrakciu na terčíku presne takej veľkosti, ako otvor. Ak obe intenzity vektorovo sčítame, dostaneme intenzitu pre prípad, že medzi zdrojom a pozorovateľom nie je žiadna prekážka (modrá šípka, pozri aj obr. 5.4). Na obrázku je ukázaný prípad, kedy sa do otvoru zmestila prvá Fresnelova zóna a časť druhej zóny. Vidíme ale, že rovnosť 5.8 dostaneme pre ľubovoľne veľký otvor – zmení sa len poloha bodu B.

počiatku po koniec Cornuovej špirály, a teda intenzitu, akú nameriame v bode P v prípade, že medzi P a zdrojom nie je žiadna prekážka.

6. **Difrakcia na hrane**

   Na ľavom obrázku 5.8 dopadá rovinná vlna zhora na tienidlo. Podľa Huyghensovho princípu je intenzita v bode P na tienidle daná príspevkom intenzít z každého bodu vlnoplochy. Tieto príspevky sú graficky zobrazené Cornuovou špirálou na druhom obrázku. Príspevky od jednotlivých bodov vlnoplochy sú reprezentované malými vektormi. Prvé štyri sú na obrázku naznačené modrými šípkami. Orientácia vektorov a ich dĺžka sa mení ako funkcia vzdialenosti – ich dĺžka klesá so vzdialenosťou od bodu P. Cornuova špirála je dvojitá a samozrejme symetrická – príspevky z ľavej časti (dolná časť špirály), sú rovnaké, ako príspevky z pravej časti (horná časť špirály). Body Q a X reprezentujú nekonečne vzdialené body vlnoplochy. Ak sčítame všetky príspevky, dostaneme vektor QX, ktorý reprezentuje intenzitu poľa E_0 v bode P. Tretí obrázok ukazuje intenzitu na tienidle v prípade, že medzi zdroj a tienidlo je vložená rovinná nepriehľadná prekážka. Intenzita je nenulová aj v miestach za prekážkou, a v osvetlenej oblasti osciluje – v niektorých miestach je podstatne vyššia, ako keby prekážky nebolo. Vysvetlenie tejto priestorovej závislosti dáva Cornuova špirála na pravom obrázku: v prítomnosti prekážky je potrebné zmazať tú časť Cornuovej špirály, ktorá pochádza od bodov zakrytých prekážkou. Ak napríklad počítame intenzitu v bode P, ktorý leží presne oproti okraju prekážky, zmažeme celú dolnú časť špirály (na pravom obr. od bodu P do bodu Q). Výsledná intenzita E_P je teda daná vektorom PX a zrejme platí $E_P = E_0/2$. Podobne intenzitu v bode A dostaneme, ak na Cornuovej špirále zmažeme príspevky od bodu A až do bodu Q. Ak sa bude bod A pohybovať na tienidle doľava (teda viac do tieňa, musíme zmazať stále väčšiu časť špirály (bod A na Cornuovej špirále sa pohybuje smerom k bodu X). Preto bude intenzita E_A monotónne klesať. Podobne dostaneme intenzitu E_R v bode R, ak zmažeme časť špirály RQ. Geometrická konštrukcia vysvetľuje, prečo $E_R > E_0$. Ak sa R bude vzďaľovať od bodu P, bude intenzita E_R oscilovať, pretože vzdialenosť RX nie je monotónnou funkciou polohy R na Cornuovej špirále.



Obr. 5.8. Grafický výpočet intenzity vlnenia difragujúceho na hrane. Zobrazenie je len kvalitatívne, nezodpovedá reálnemu výpočtu.

5.3 Fraunhoferova difrakcia

Literatúra [3], kap. 8, [2], kap. 30.

1. **Franuhoferova difrakcia** – difrakcia "v nekonečne". Fresnelovo číslo

$$N_F \ll 1 \tag{5.9}$$

   Na prekážku dopadá rovinná vlna.

2. **Difrakcia na otvore** – jednorozmerný prípad: šírka otvoru je b. Jednotlivé body otvoru sú podľa Huyghensovho - Fresnelovho princípu koherentnými zdrojmi vlnenia. Intenzita na tienidle je výsledkom interferencie všetkých príspevkov a závisí od uhla θ (obr. 5.9).

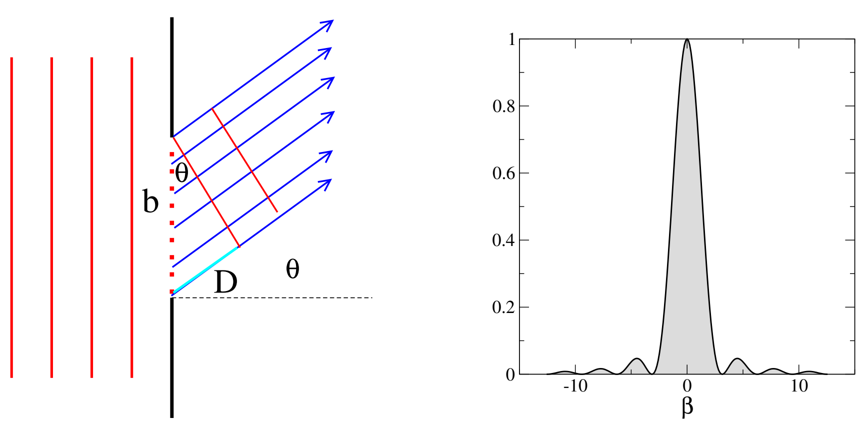
$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right]^2, \qquad \beta = \frac{1}{2}kb\sin\theta \tag{5.10}$$

   Odvodenie (obr. 5.9). Intenzita elektrického poľa za štrbinou je

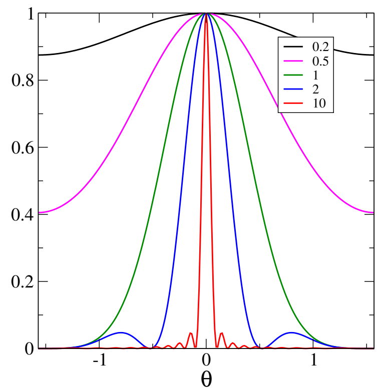
$$E(\theta) = E_0\frac{1}{b}\int_0^b dz e^{ikz\sin\theta} = \frac{e^{ikb\sin\theta}-1}{ikb\sin\theta} = e^{i(kb\sin\theta)/2}\,\frac{\sin\beta}{\beta} \tag{5.11}$$

   Faktor $1/b$ pochádza z normovania dopadajúceho poľa na jednotku "plochy". Pomer prejdenej vlny k dopadajúcej je $E(\theta)/E_0$ a

$$\frac{I(\theta)}{I_0} = \left|\frac{E(\theta)}{E_0}\right|^2 \tag{5.12}$$



Obr. 5.9. Fraunhoferova difrakcia na štrbine: zľava dopadá rovinná vlna, vpravo vidíme jednu difragovanú vlnu, odchádzajúcu pod uhlo θ. Tienidlo je v nekonečne, preto intenzita na tienidle je daná vzťahom (5.10). Najväčší dráhový rozdiel medzi odchádzajúcimi vlnami je $D = b\sin\theta$. Ak $D = \lambda$, tak sa všetky príspevky vyrušia a na tienidle pozorujeme minimum intenzity, v súlade s rovnicou (5.10), lebo $\beta = \pi$ ak $b\sin\theta = \lambda$. Pravý obrázok ukazuje $I(\beta)$ ako funkciu parametra β.



Obr. 5.10. Intenzita $I(\theta)$ ako funkcia uhla θ pre rôzne pomery b/λ. Pretože $\beta = \pi(b/\lambda)\sin\theta$, môže $I(\theta)$ "oscilovať" len keď $b > \lambda$ (prvé minimum $I(\theta)$ nastáva, keď $\beta = \pi$). Veľmi malý otvor $b \ll \lambda$, sa chová ako bodový zdroj, vyžarujúci do celej polroviny. V opačnej limite, pre $b \gg \lambda$ vidíme na tienidle jasné maximum sprevádzané malými bočnými maximami. Maximum je tým užšie, čím je pomer b/λ väčší.

3. **Tvar difrakčného obrazca** závisí od pomeru b/λ.
   - V limite $b \to 0$ sa štrbina správa ako bodový zdroj.
   - Pre $b > \lambda = 2\pi/k$ vidíme na tienidle viac maxím oddelených minimami (obr. 5.10).

4. **Difrakcia na štvorcovom otvore**

$$I(\theta_x, \theta_y) = I_0 \frac{\sin^2 \beta_x}{\beta_x^2} \frac{\sin^2 \beta_y}{\beta_y^2} \tag{5.13}$$

5. **Difrakcia na kruhovom otvore** s polomerom b:

$$I(\theta) = I_0 \frac{J_1^2(\beta)}{\beta^2} \tag{5.14}$$

   $J_1(x)$ je Besselova funkcia a $\beta = kb\sin\theta$.

6. **Rozlišovacia schopnosť** optických prístrojov
   V prípade bodového zdroja nevidím za štrbinou samotný zdroj, ale škvrnu konečnej šírky – obraz zdroja sa na tienidle rozmazáva. Tomuto sa nedá vyhnúť, pretože svetlo má vlnovú podstatu. Ak sú zdrojmi svetla dva objekty, ktoré vidím pod uhlom θ, difrakčný obraz je superpozíciou dvoch difrakčných obrazov. Jednotlivé zdroje odlíšim, ak maximá jedného obrazu neležia v minimách druhého (Rayllighovo kritérium).
   Ako vidieť z obr. 5.9, prvé difrakčné minimum nastáva, keď

$$\pi \frac{b}{\lambda} \sin\theta = \pi \qquad \text{podmienka difrakčného minima} \tag{5.15}$$

teda $\sin\theta = \lambda/b$. Pre $b \gg \lambda$ tomu zodpovedá podmienka

$$\theta \sim \frac{\lambda}{b} \tag{5.16}$$

Dva bodové zdroje teda odlíšime, ak ich “vidíme” pod uhlom väčším ako $\theta_{\min} = \lambda/b$. Preto rozlišovaciu schopnosť optických prístrojov (teleskopu, šošovky, ...), zlepšíme nárastom ich polomeru alebo zmenšením vlnovej dĺžky. Rozlišovacia schopnosť ale nikdy nemôže byť ideálna.

5.4 Difrakcia na mriežke

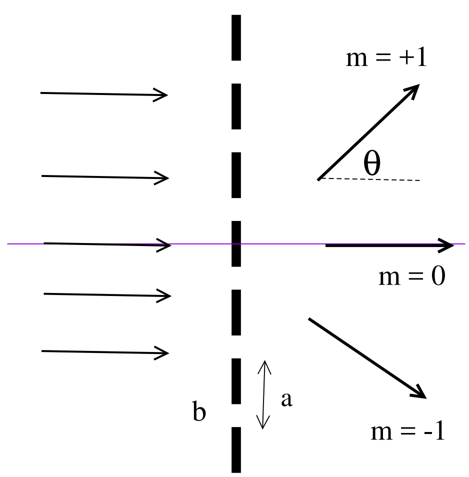
1. **Difrakcia na N štrbinách**
   Elektromagnetické vlnenie dopadá na prekážku s N identickými otvormi (obr. 5.11).

2. Intenzitu $I(\theta)$ nájdeme integrovaním podobne ako v predchádzajúcom prípade: v každej perióde $a(m-1) < x < am$ dostaneme vyjadrenie zodpovedajúce jednej štrbine, vzhľadom na polohu štrbiny ho ale musíme vynásobiť “spoločným” faktorom $e^{ika\sin\theta\cdot m}$. Výsledok vyjadríme v tvare geometrického radu

$$I(\theta) = I_0 \sum_{m=1}^{N} \left[e^{ika\sin\theta}\right]^m \frac{\sin\beta}{\beta} \tag{5.17}$$

ktorý ľahko sčítame a upravíme. Dostaneme tak celkovú intenzitu

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right]^2 \left[\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right]^2 \tag{5.18}$$



Obr. 5.11. Difrakcia na periodickej štruktúre pozostávajúcej z $N = 6$ rovnakých štrbín. Štrbiny majú šírku b a sú rozmiestnené s periódou a.

$$\alpha = \frac{1}{2}ka\sin\theta, \qquad \beta = \frac{1}{2}kb\sin\theta \tag{5.19}$$

a . . . priestorová perióda, b . . . šírka jednotlivej štrbiny.
Hlavné maximá funkcie $I(\theta)$ nájdeme pre uhly θ_m (pozri obr. 5.12)

$$\sin\theta_m = m\frac{\lambda}{a} \qquad (\alpha = m\pi) \tag{5.20}$$

pre ktoré je v rovnici (5.18) $\sin\alpha$ v menovateli rovný nule. Pre tieto hodnoty θ je druhý člen

$$\lim_{\theta\to\theta_m}\left[\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right]^2 = N^2 \tag{5.21}$$

Maximá budú užšie a vyššie, keď počet štrbín N narastie. Podmienka existencie vyšších difrakčných rádoch:

$$a > \lambda \tag{5.22}$$

Poloha maxím je daná pomerom a/λ. Ak zmenšíme vlnovú dĺžku, budú maximá hustejšie (obr. 5.12).

3. Okrem hlavných maxím existujú aj podstatne menšie vedľajšie maximá, dané podmienkou

$$\alpha = \left[m + \frac{m' + 1/2}{N}\right]\pi, \qquad m' = 1, 2, \dots, N-1 \tag{5.23}$$

a minimá, v ktorých $I(\theta) = 0$ pre

$$\alpha = \left[m + \frac{m'}{N}\right]\pi, \qquad m' = 1, 2, \dots, N-1 \tag{5.24}$$

Tieto maximá aj minimá sú viditeľné na obr. 5.12.

4. **Difrakčná mriežka**
Rozklad svetla na jednotlivé farby: pri dopade bieleho svetla na difrakčnú mriežku dostaneme za mriežkou jednotlivé farby šíriace sa pod rôznymi uhlami (obr. 5.12).

5. Rozlišovacia schopnosť difrakčnej mriežky:
Ak chceme rozlíšiť od seba dve farby, definované vlnovými dĺžkami λ a λ', potrebujeme, aby sa ich hlavné maximá neprekrývali. Minimálna požiadavka na rozlíšenie je, aby hlavné maximum pre λ' ležalo tam, kde prvé minimum pre λ, teda aby zároveň platilo

$$m\lambda' = a\sin\theta \qquad (m + \frac{1}{N})\lambda = a\sin\theta \tag{5.25}$$

z čoho dostaneme

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN} \tag{5.26}$$

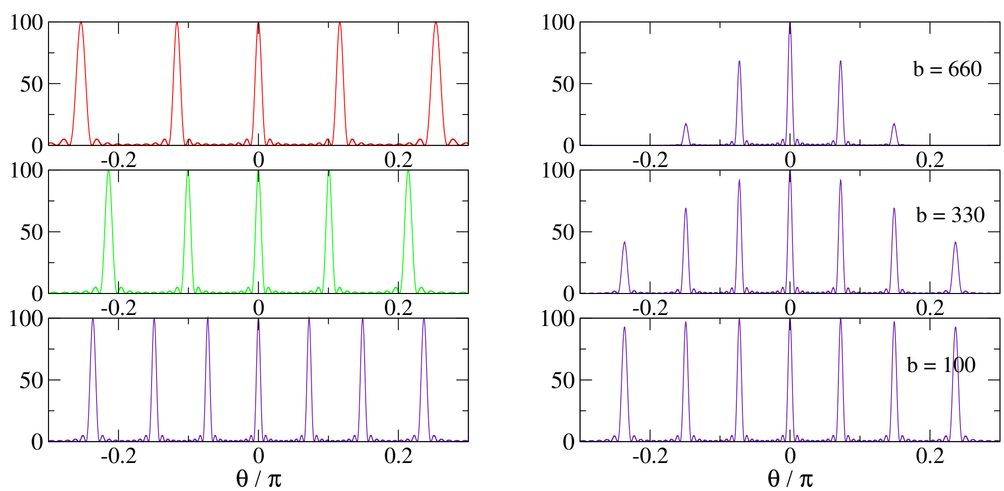
Pre rozlíšenie je teda lepšie, ak mriežka obsahuje čo najviac štrbín (N je veľké). Rozlíšenie je zároveň lepšie vo vyšších difrakčných rádoch (m veľké).

6. **Zovšeobecnenie okrajovej podmienky**
Vďaka priestorovej periodicite sa pozdĺžna zložka $k_\parallel$ nemusí zachovávať. Platí všeobecnejší vzťah:

$$k_{2\parallel} = k_{1\parallel} + mG, \qquad G = \frac{2\pi}{a}, \qquad m\ldots \text{ celé číslo} \tag{5.27}$$

Rovnako dopadajúca vlna sa odráža pod rôznymi uhlami (vyššie difrakčné rády).
Okrajová podmienka (5.27) platí pre všetky priestorovo periodické štruktúry.

7. **Difrakcia na kryštáloch**
Kryštál predstavuje trojrozmernú periodickú štruktúru s typickou priestorovou periódou $a \sim 0,2$ nm $= 2 \times 10^{-10}$ m (táto, samozrejme, môže byť v jednotlivých smeroch rôzna). Ak na kryštál dopadá elektromagnetické vlnenie zodpovedajúcej vlnovej dĺžky $\lambda \sim a$, vlnenie odchádza pod rozličnými smermi – difraguje na mriežke.
Vlnové dĺžky $\lambda \sim 10^{-10}$ m zodpovedajú RTG žiareniu – preto sa hovorí o RTG difrakcii. RTG difrakcia je jednou zo základných metód skúmania štruktúry kryštálov.



Obr. 5.12. Ľavý obrázok: funkcia $[\sin(N\alpha)/\sin\alpha]^2$, $\alpha = \pi(a/\lambda)\sin\theta$ pre tri vlnové dĺžky červená: $\lambda = 700$ nm, zelená: $\lambda = 623$ nm, fialová: $\lambda = 451$ nm. Difrakcia nastáva na mriežke s $N = 10$ štrbinami. Štrbiny majú veľkosť $b = 100$ nm a vzdialenosť $a = 2000$ nm. Maximá zodpovedajú uhlom daným rovnicou (5.20). Hustota maxím rastie, keď vlnová dĺžka klesá. Pravý obrázok ukazuje vplyv šírky štrbiny na difrakčný obraz: pre fialové svetlo sa použila mriežka s troma rôznymi šírkami štrbiny (hodnoty b sú dané v obrázkoch).

KAPITOLA 6

Elektromagnetické žiarenie

Literatúra: [2]

6.1 Vznik elektromagnetického žiarenia

1. Feynmanov príklad vzniku EM poľa: Feynman, 18.4 (Putujúce pole) elektromagnetické pole v okolí nekonečného vodiča, ktorým v čase $0 < t < T$ prechádza elektrický prúd, ktorý je zdrojom elektromagnetickej vlny, šíriacej sa od vodiča. Táto vlna existuje nezávisle od stavu vodiča (teda aj v čase, keď vodičom už prúd neprechádza).

2. **Vektorový potenciál**
   Pretože div $\vec{B} = 0$, môžeme indukciu magnetického poľa vyjadriť ako rotáciu nejakej vektorovej veličiny

   $$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A} \tag{6.1}$$

   Vektorový potenciál $\vec{A}$ nie je presne určený, napríklad ak zmeníme vektorový potenciál o gradient ľubovoľnej skalárnej funkcie f,

   $$\vec{A} \to \vec{A} + \mathrm{grad} f \tag{6.2}$$

   dostaneme tú istú indukciu magnetického poľa.

3. **Intenzita elektrického poľa**
   Dosaďme (6.1) do Maxwellovej rovnice:

   $$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{6.3}$$

Dostaneme

$$\text{rot}\left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right] = 0 \tag{6.4}$$

Musí teda platiť

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad}\ \phi \tag{6.5}$$

kde ϕ je **skalárny potenciál**. Ak zmeníme vektorový potenciál $\vec{A}$ podľa rovnice (6.2), musíme zároveň zmeniť skalárny potenciál:

$$\phi \to \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \tag{6.6}$$

Oba potenciály – vektorový aj skalárny – nie sú preto jednoznačne určené. Vhodnou voľbou funkcie f môžeme ich výpočet zjednodušiť. Nejednoznačnosť potenciálov je daná tým, že pole sa prejavuje intenzitou $\vec{E}$ a magnetickou indukciou $\vec{B}$. Tie isté hodnoty týchto veličín dostaneme pre rôzne hodnoty potenciálov.

4. **Vlnová rovnica pre potenciály**
Vyjadríme $\vec{E}$ a $\vec{B}$ pomocou potenciálov:

$$\vec{E} = -\text{grad}\ \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{6.7}$$

$$\vec{B} = \text{rot}\ \vec{A} \tag{6.8}$$

Dosaďme do Maxwellovej rovnice

$$\begin{aligned} \text{rot}\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot rot}\vec{A} &= \text{grad div}\vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2}\text{grad}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{6.9}$$

čo sa dá upraviť na tvar

$$\text{grad}\left[\text{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right] = \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} \tag{6.10}$$

Pretože $\vec{A}$ a ϕ nie sú jednoznačne určené, zvolíme funkciu $f(t, \vec{r})$ tak, aby bola v každom čase a v každom bode priestoru splnená podmienka

$$\text{div}\ \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{6.11}$$

Táto voľba sa v literatúre označuje ako **Lorenzova kalibrácia**.

Vektorový potenciál potom spĺňa rovnicu

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} \tag{6.12}$$

Analogicky odvodíme rovnicu pre skalárny potenciál

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{6.13}$$

Oba potenciály teda spĺňajú vlnovú rovnicu so zdrojmi. Náboje a prúdy v týchto rovniciach vystupujú ako zdroje elektromagnetického poľa.

5. **Riešenie vlnovej rovnice pre potenciál**
Vlnovú rovnicu nebudeme riešiť (pozri napr. [11]), uvedieme len riešenie

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r'},t-R/c)}{R}\mathrm{d}\vec{r'}, \qquad R = |\vec{r}-\vec{r'}| \tag{6.14}$$

$$\phi(t,\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r'},t-R/c)}{R}\mathrm{d}\vec{r'} \tag{6.15}$$

kde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r'}$ je vzdialenosť medzi pozorovateľom, ktorý sa nachádza v bode $\vec{r}$ a zdrojom poľa v bode $\vec{r'}$. Zdroj musel pôsobiť už v čase $t - R/c$, aby EM pole mohlo prekonať vzdialenosť R od zdroja k pozorovateľovi. Integrujeme cez celý priestor, lebo zdroje poľa môžu byť v ľubovoľnom bode priestoru.

6. **Retardované potenciály**
Elektromagnetické pole v bode $\vec{r}$ a čase t pochádza od nábojov a prúdov v čase $t - R/c$. “Signál” musí prekonať vzdialenosť R rýchlosťou c. Preto je potenciál v bode $\vec{r}$ vzniká v neskorších časoch t (je opozdený – retardovaný).

7. Poznámka. Všimnime si, že vzťah pre skalárny potenciál ϕ a tri zložky vektorového potenciálu je ten istý; keby sme zaviedli vektory dĺžky 4, mohli by sme rovnice (6.14) a (6.15) napísať v kompaktnom tvare (relativistický zápis teórie elektromagnetického poľa).

6.2 Pole oscilujúceho dipólu

1. Riešenie (6.14,6.15) môžeme použiť na nájdenie elektromagnetického poľa v ľubovoľnom prípade. Aplikujeme ho na elektrický dipól: napr. elektrón s nábojom q oscilujúci okolo ťažkého jadra. Striedavé elektrické pole prinúti elektrón oscilovať, zatiaľ co ťažké jadro môžeme považovať za nehybné (resp. jeho pohyb zanedbať). Vznikne elektrický oscilujúci dipól. Ak je dipól orientovaný v smere z, tak

$$\vec{p} = (0, 0, p_z), \qquad p_z = qz \tag{6.16}$$

Časová zmena dipólu môže vzniknúť tak, že náboj osciluje v smere z s amplitúdou d (dipól periodicky mení svoju orientáciu). Potom

$$\frac{\partial p_z}{\partial t} = qv_z = j_z \tag{6.17}$$

Ak pole osciluje s frekvenciou ω, bude časová závislosť dipólu:

$$p_z(t) = p_0 \sin \omega t \tag{6.18}$$

kde $p_0 = qd$.

2. **Dipól ako zdroj elektromagnetického poľa** Pohybujúci sa náboj je zdrojom poľa (rovnica 6.14). Priamym výpočtom vieme nájsť vyžarované elektrické a magnetické pole v mieste $\vec{r}$ a čase t. Obmedzíme sa na prípad $r \gg \lambda \gg d$:

   - dipól je malý v porovnaní s vlnovou dĺžkou ($\lambda \gg d$) vyžiareného žiarenia, teda osciluje veľmi pomaly – rýchlosť náboja v malá v porovnaní s rýchlosťou svetla.
   - zaujímame sa o elektromagnetické pole ďaleko od dipólu

V tomto priblížení má elektrické pole v okolí dipólu má tvar[1]

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r^3} \left[\frac{\partial^2 \vec{p}(t - r/c)}{\partial t^2} \times \vec{r} \right] \times \vec{r} \tag{6.19}$$

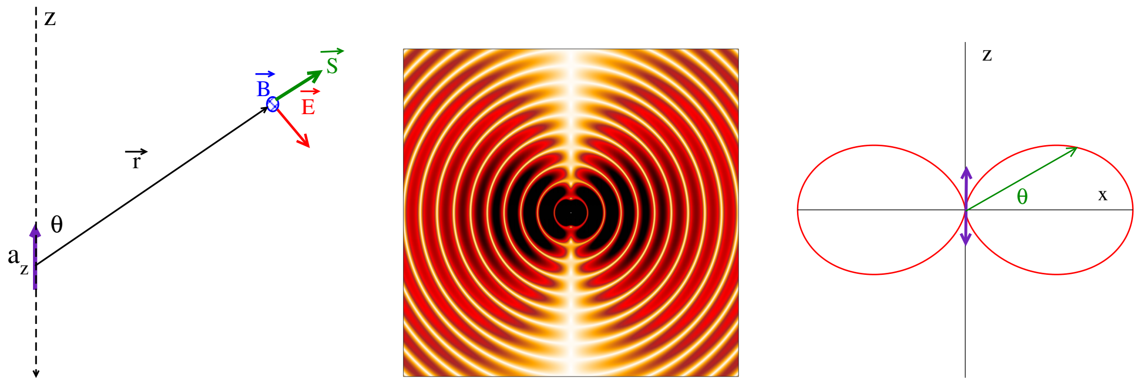
Odvodenie pozri [2]). Smer poľa závisí od $\vec{r}$ a samozrejme $\vec{E} \perp \vec{r}$ (obr. 6.1). Absolútnu hodnotu poľa dostaneme po dosadení $\vec{p} = (0, 0, p_z)$

$$E(t, \vec{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} a(t - r/c) \sin\theta \tag{6.20}$$

$a = \partial^2 z / \partial t^2$ je zrýchlenie náboja.

3. El. pole je preto úmerné zrýchleniu náboja a: **urýchľované náboje vyžarujú EM pole**.

[1] Všimnime si, že v vyjadrení (6.19) chýba pole statického dipólu, pretože klesá $\sim 1/r^3$ a na veľkých vzdialenostiach je zanedbateľne malé. Pole uvedené v rovnici (6.19) klesá so vzdialenosťou len $\sim 1/r$.



Obr. 6.1. Vľavo: Oscilujúci dipól orientovaný v smere osi z (zrýchlenie elektrického náboja je a_z) vytvára v bode $\vec{r}$ elektrické a magnetické pole. V smere vektora $\vec{r}$ preto dipól vyžaruje energiu, danú Poyntingovým vektorom $\vec{S}$. Obrázok je kruhovo symetrický okolo vertikálnej osi z. Prostredný obrázok ukazuje profil vyžiarenej elektromagnetickej vlny $|E|^2$. Na pravom obrázku je smerový diagram vyžarovania dipólu: dĺžka zelenej šipky reprezentuje intenzitu žiarenia odchádzajúceho pod uhlom θ voči osi x. Intenzita je Najväčší v rovine xy a nulová v smere osi z rovnobežnej s dipólom.

4. Elektrické pole žiariaceho dipólu klesá ako $1/r$ (v prípade statického dipólu klesalo ako $1/r^3$). Prostredný obrázok je okamžité rozloženie elektrického poľa v okolí žiariaceho dipólu.

5. Podobne vieme vyjadriť magnetické pole v bode $\vec{r}$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2}\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2\vec{p}(t-r/c)}{\partial t^2}\times\vec{r}\right] \tag{6.21}$$

   Magnetické pole $\vec{B}\perp\vec{r}$ a $\vec{B}\perp\vec{E}$ a na ľavom obrázku obrázku 6.1 je orientované smerom do roviny papiera.

6. Poyntingov vektor vo vzdialenosti r od dipólu:

$$S(\vec{r},t) = \frac{1}{Z_0}|E|^2 = \frac{q^2a^2(t-r/c)\sin^2\theta}{16\pi^2\epsilon_0 r^2 c^3} \tag{6.22}$$

   Závislosť $\vec{s}$ od smeru žiarenia vidíme na pravom obrázku 6.1. Rozloženie poľa v priestore dostaneme, ak obrázok rotujeme okolo osi z.

7. **Žiarivý výkon oscilujúceho dipólu**
   Výkon vyžiarený cez guľovú plochu s polomerom r je

$$P = r^2\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} d\phi S(\vec{r},t) = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{6.23}$$

   (element povrchu gule je $r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$).

8. Harmonický oscilátor Ak dipól kmitá ako harmonický oscilátor s amplitúdou d, potom zrýchlenie oscilujúceho náboja je

$$a = -\omega^2 z \tag{6.24}$$

a po ustrednení cez jednu periódu oscilácií:

$$\langle a^2 \rangle = \frac{1}{2}\omega^4 d^2 \tag{6.25}$$

(1/2 pochádza z ustrednenia cez jednu periódu). Z rovnice (6.23) potom dostaneme množstvo energie vyžiarenej za 1 sekundu

$$P = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0}\frac{\omega^4 d^2}{c^3} \tag{6.26}$$

q . . . náboj kmitajúceho náboja.

9. Frekvencia vyžiarenej vlny Všimnime si, že frekvencia ω kmitajúceho oscilátora je totožná s frekvenciou vyžiarenej vlny. To vidíme zo vzťahov (6.19) a (6.21): časová závislosť polí je daná časovou závislosťou dipólu $\vec{p}$.

10. **Polarizácia vyžiarenej vlny**
V rovine xy (kolmej na oscilujúci dipól) je elektrické pole orientované v smere osi z.

11. **Klasický model atómu**
Oscilujúci elektrický náboj vyžaruje energiu. Pokiaľ nemá žiadny vonkajší zdroj energie, musia jeho kmity v čase exponenciálne klesať (pozri tlmený harmonický oscilátor).

Po objave atómového jadra (Rutherford) a elektrónu (Thomson) na konci 19. storočia sa zdalo, že atóm by mohol pozostávať z kladne nabitého jadra, okolo ktorého by po kruhových dráhach obiehali záporne nabité elektróny (model sa podobal na Slnečnú sústavu, v ktorej gravitačnú príťažlivú silu nahradíme Coulombickou silou medzi dvoma nábojmi). Napríklad v atóme vodíka by elektrón s nábojom $-q$ obiehal okolo jadra (protónu s nábojom $+q$) vo vzdialenosti d a jeho celková energia by bola

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d} \tag{6.27}$$

pretože rýchlosť a polomer dráhy sú viazané rovnosťou Coulombickej sily a odstredivej sily:

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{mv^2}{d} \tag{6.28}$$

[15, 16]. Ak je polomer dráhy $d = 0,5 \cdot 10^{-10}$ m (Bohrov polomer) a rýchlosť elektrónu $v = \alpha c$ ($\alpha = 1/137$ je konštanta jemnej štruktúry), odvodíme zo vzťahu (6.26), že elektrón by svoju kinetickú energiu vyžiaril za čas 10^{-16} s a "padol" by na jadro. Atómy preto nie je možné konzistentne opísať z hľadiska klasickej fyziky.

12. **Iné príklady žiarenia urýchľovnaých nábojov**
    Nabité častice vyžarujú vždy, keď sú nútené pohybovať sa po kruhovej dráhe, napríklad v urýchľovačoch elementárnych častíc. Niekedy je toto žiarenie užitočné na experimentálne účely (pozri synchrotrón v Grenoble).

    Brzdné žiarenie - náhle zabrzdené náboje sa kinetickej energie zbavujú vyžarovaním elektromagnetických vĺn. RTG žiarenie sa napríklad získa brzdení rýchlych elektrónov (s typickou energiou desiatky keV)[2] nárazom na povrch kovu [15, 16].

[2] 1 eV = $1,6 \cdot 10^{-16}$ J je energia, ktorú získa elektrón urýchlený potenciálom 1 V.

KAPITOLA 7

Elektromagnetické vlny a atómy

Literatúra [2]

7.1 Atóm ako zdroj elektromagnetického vlnenia

1. Atóm sa môže excitovať nielen vonkajším elektromagnetickým poľom (ako bolo diskutované v predchádzajúcej časti), ale napr. aj zrážkami s inými atómami v plyne. Pri *nepružnej* zrážke dvoch atómov (molekúl) sa časť ich kinetickej energie môže "použiť" na excitáciu atómu do vyššieho energetického stavu. Tejto energie sa atóm zbaví vyžiarením EM žiarenia.

2. Uvažujeme proces, v ktorom atóm z vonkajšieho zdroja získal energiu, preto kmitá a energiu postupne vyžaruje do okolia. Tým prechádza do základného stavu. Proces excitácie atómu a jeho de-excitácie sa dá opísať len kvantovomechanicky. Zjednodušený model predpokladá, že atóm sa chová ako harmonický oscilátor s vlastnou frekvenciou ω. Zrážkou s iným atómom sa rozkmitá; získaná energia sa premení na energiu oscilácií:

$$W = \frac{1}{2}m\omega^2 d^2 \tag{7.1}$$

3. Radiačný útlm: pretože takýto oscilátor vyžaruje, energia oscilátora klesá podľa vzťahu

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -P, \qquad P = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0}\frac{\omega^4 d^2}{c^3} \tag{7.2}$$

(rovnica 6.26).

4. Všimnime si, že stratový výkon P je priamoúmerný energii W:

$$P = \omega\frac{q^2}{3\epsilon_0 mc^2}\frac{\omega}{2\pi c}W = \omega\,\frac{4\pi}{3}\,\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{mc^2}\,\frac{1}{\lambda}\,W \tag{7.3}$$

5. Definujme kvalitu oscilátora Q vzťahom

$$Q = \omega \frac{W}{P}, \qquad P = \frac{\omega}{Q} W \tag{7.4}$$

(Q je bezrozmerné číslo). Teda

$$Q = \frac{3}{4\pi} \frac{\lambda}{r_0} \tag{7.5}$$

kde

$$r_0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{mc^2} \tag{7.6}$$

je "klasický polomer elektrónu"; $r_0 \sim 2,8 \times 10^{-15}$ m. Kvalita oscilátora teda závisí len od pomeru vlnovej dĺžky vyžiareného svetla a polomeru r_0!

6. Po dosadení (7.4) do rovnice (7.2) dostaneme exponenciálny pokles energie oscilátora v čase

$$W(t) = W(0) e^{-t/\tau}, \tag{7.7}$$

s charakteristickým časom

$$\tau = \frac{Q}{\omega} \tag{7.8}$$

Vyžarovanie atómu teda nie je okamžité, ale trvá čas τ. Klasický model je len kvalitatívny, dá sa očakávať, že rôzne atómové prechody budú mať rôzne relaxačné časy τ.

7. **Šírka spektrálnej čiary**
Atóm nevyžiari rovinnú vlnu s frekvenciou ω, ale vlnový balík s frekvenciami $\omega \pm \delta\omega$, kde

$$\delta\omega = \frac{2\pi}{\tau} \tag{7.9}$$

a

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{2\pi}{Q} \tag{7.10}$$

Konečná doba vyžarovania teda spôsobí nekoherentnosť vyžiarenej vlny.

8. Príklad: sodíkový atóm: $\lambda = 600$ nm, po dosadení do rovnice (7.5) dostaneme $Q \sim 5 \times 10^7$ a koherenčný čas $\tau = 1/\delta f \sim 10^{-8}$ s.

9. Koherenčná dĺžka pre sodík ako zdroj žiarenia, $\ell_c = c\tau \sim 3$ m je nerealisticky veľká. Pre plyny v experimentoch pozorujeme typickú koherenčnú dĺžku $\ell_c \sim 600$ μm. Pokles konferenčnej dĺžky o takmer 4 rády je spôsobený tým, že molekuly v plyne sa pohybujú veľkými rýchlosťami, takže frekvenčné rozdelenie vyžiareného svetla je ovplyvnené ďalšími efektami:

10. **Dopplerov jav**
Zmena frekvencie vyžiarenej vlny v závislosti od rýchlosti pohybu zdroja:

$$\Delta f = f\frac{v}{c} \tag{7.11}$$

Molekuly v plyne sa pohybujú veľkými rýchlosťami. Stredná hodnota rýchlosti pri izbovej teplote T je

$$v \sim \sqrt{3kT/m} \sim 10^3 \text{ m/s} \tag{7.12}$$

(m je hmotnosť molekuly, $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K je Boltzmannova konštanta) preto $v/c \sim 10^{-5}$. Samotný Dopplerov jav teda znižuje kvalitu Q o dva rády a rozširuje tak spektrálnu čiaru.

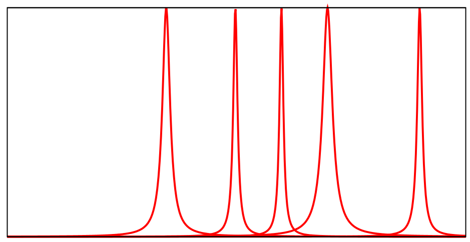
11. **Maxwellovo rozdelenie rýchlostí**

$$P(v)dv = \frac{4\alpha^{3/2}}{\sqrt{\pi}}v^2 e^{-\alpha v^2}dv, \qquad \alpha = \frac{m}{2kT} \tag{7.13}$$

Rozdelenie je široké, s "chvostom" zasahujúcim do vysokých rýchlostí. Niektoré molekuly preto majú podstatne vyššiu rýchlosť, ako je stredná rýchlosť daná vzťahom (7.12). Šírka rozdelenia narastá, keď rastie teplota T a klesá hmotnosť m atómov. Rozšírenie čiar je vtedy ešte výraznejšie.

12. **Vzájomné zrážky molekúl**
Molekuly v plyne preletia bez zrážky s inou molekulou dráhu cca $\ell \sim 70$ nm. Pri rýchlosti $\sim 10^3$ m/s je preto stredný čas medzi dvoma zrážkami $\tau \sim \ell/v \sim 10^{-10}$ s. Preto molekula, ktorá vyžaruje, sa v procese vyžiarenia cca 100-krát zrazí s inou molekulou. Také zrážky nepriaznivo pôsobia na koherenciu vyžiareného svetla.

13. **Zriedený plyn ako zdroj EM žiarenia (svetla)**
Plyn uzavretý v skúmavke môže byť zdrojom žiarenia. Frekvenciu zrážok je možné zvýšiť alebo ohriatím plynu alebo jeho ionizáciou (elektrický výboj). Frekvenčné spektrum získaného žiarenia závisí od chemického zloženia plynu, od jeho koncentrácie a od teploty (rýchlosti pohybujúcich sa molekúl, resp. iónov). Ak je plyn dostatočne zriedený, spektrum pozostáva z izolovaných spektrálnych čiar, ktorých šírku sme opísali vyššie. Vlastné frekvencia týchto spektrálnych čiar súvisia s vlastnými frekvenciami atómov (molekúl). Pozri obr. 7.1. Pri vyšších hustotách plynu sa spektrálne čiary rozšíria a spektrum sa stane spojitým.



Obr. 7.1. Schématický náčrt spektra zriedeného plynu: atómu (molekuly) vyžarujú na jednotlivých frekvenciách. Ukázaných je 5 spektrálnych čiar, každá so svojou charakteristickou šírkou $\delta\omega$. Pokiaľ je $\delta\omega$ menšie, ako vzdialenosť ejdnotlivých čiar, pozorujeme čiarové spektrum. Ak sa čiary rozšíria a začnú sa prekrývať, spektrum sa stane spojitým. POzri aj Kirchhoffove zákony žiarenia.

14. **Uväznenie iónov**
    Téma modernej fyziky: izolovať a uväzniť niektoré ióny v špeciálne pripravených pasciach tak, aby sa znížila ich rýchlosť a eliminovali vzájomné zrážky. Ak takto izolované ióny excitujeme, môžu vyžarovať veľmi úzke spektrálne čiary s veľkými hodnotami Q.

7.2 Kirchhoffove zákony žiarenia

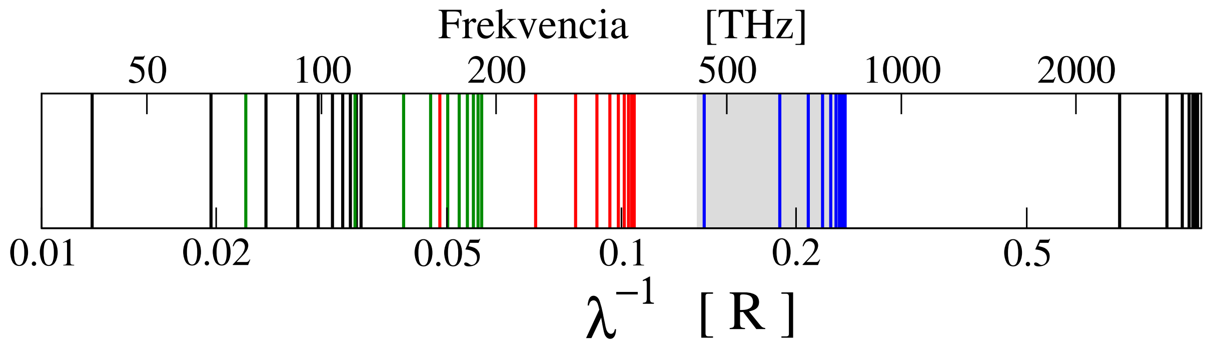
1. Kirchhoff urobil prvé merania spektier (1861), a ich vlastnosti sformuloval v troch zákonoch:

   - Tuhé látky, kvapaliny a husté plyny pri vyšších teplotách vyžarujú elektromagnetické žiarenie so spojitým frekvenčným spektrom (napr. žiarenie Slnka, rozohriatej pece).
   - Horúci zriedený plyn vyžaruje do chladnejšieho okolia diskrétne spektrum pozostávajúce len zo spektrálnych čiar s presne definovanými frekvenciami. Súbor spektrálnych čiar je jedinečný pre každý typ atómov, z ktorých je plyn zložený.
   - Studený zriedený plyn v okolí horúcich telies absorbuje z okolia žiarenie s rovnakým spektrom, aké emituje pri svojom zohriatí. Preto sa v spojitom spektre žiarenia emitovaného horúcim telesom po prechode studeným plynom objavia tmavé absorpčné spektrálne čiary (obrázok 7.2).

2. Podstata vzniku diskrétneho energetického spektra atómov, ktoré Kirchhoffove zákony o spektrách opisujú, bola fyzikálne objasnená v 20. storočí, a bude preberaná v kvantovej fyzike [15, 16].

3. **Fraunhofferove čiary**

   Fraunhoffer pozoroval, že v spektre svetla prichádzajúceho zo Slnka chýbajú mnohé frekvencie (Fraunhofferove čiary, pozri obrázok 7.2). Najjednoduchším vysvetlením je, že svetlo, vyžiarené z horúceho povrchu Slnka, môže byť absorbované atómami v plynnom obale Slnka; frekvencie absorbovaného žiarenia potom prirodzene chýbajú v spektre žiarenia, prichádzajúceho na Zem. Takto bolo v spektre Slnka objavené hélium.



Obr. 7.2. Schématický náčrt Fraunhofferových čiar pre atóm vodíka. Frekvencia každej absorpčnej čiary zodpovedá rozdielu dvoch vlastných energií atómu: $f = [E_{\rm po} - E_{\rm konc}]/h$ (h je Planckova konštanta, $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js). Preto má každý atóm inú štruktúru absorpčných čiar, podľa ktorej ho je možné identifikovať. Vlnová dĺžka je uvedená pomocou jednotky Rydberg (1 Ry $= 1,097 \cdot 10^7$ m^{-1}).

Spektrá žiarenia prichádzajúce z ďalekých hviezd tiež obsahujú mnohé absorpčné čiary; ich analýzou sa potvrdilo, že v atmosfére hviezd sa vyskytujú tie isté atómy, aké poznáme na Zemi; zloženie čiar, okrem toho, umožňuje odhadnúť teplotu povrchu hviezdy [17].

7.3 Rozptyl EM vlnenia na malých objektoch

1. **Klasická predstava o rozptyle elektromagnetickej vlny na atóme**
   EM vlna, dopadajúca na atóm, rozkmitá jeho elektrón (lebo elektrón je podstatne ľahší, ako jadro). Elektrón začne kmitať okolo rovnovážnej polohy ako **budený** harmonický oscilátor, čím vzniká v atóme oscilujúci dipól. Preto bude atóm vyžarovať energiu tak, ako bolo opísané v predchádzajúcej kapitole. Budenie "zabezpečuje" dopadajúca elektromagnetická vlna.
   Chovanie elektrónu môžeme opísať z našich znalostí budeného a tlmeného harmonického oscilátora. Budenú silu reprezentuje dopadajúca EM vlna, energetické straty sú dané vyžiarenou energiou. Frekvencia oscilátora je daná frekvenciou dopadajúcej vlny.

2. Amplitúda kmitov budeného harmonického oscilátora
   Vonkajšie pole E dopadá na malý objekt: atóm, modelovaný harmonickým oscilátorom s vlastnou frekvenciou ω_0. Potom amplitúda kmitov elektrónu je

   $$d = \frac{qE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{7.14}$$

   (zanedbali sme stratový člen v menovateli).

3. **Účinný prierez** σ Účinný prierez je definovaný ako podiel rozptýlenej energie k celkovej dopadajúcej energii:

   $$\sigma = \frac{\text{rozptýlená energia}}{\text{dopadajúca energia na } 1\text{m}^2} \tag{7.15}$$

Ak sa v priereze 1 m^2 nachádza jediný atóm, bude rozptýlená energia daná rovnicou 6.26

$$P = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0}\frac{\omega^4 d^2}{c^3} \tag{7.16}$$

Dopadajúca energia je daná Poyntingovým vektorom

$$E_d = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 c \tag{7.17}$$

Po dosadení za d dostaneme účinný prierez rozptylu:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \times r_0^2 \tag{7.18}$$

kde

$$r_0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{mc^2} \tag{7.19}$$

kde $r_0 \sim 2,8 \times 10^{-15}$ m je "**klasický polomer elektrónu**", ktorý dostaneme z rovnosti pokojovej energie elektr-onu a jeho elektrostatickej energie, ak by sme si elektrón predstavili ako homogénne nabitú guľu s polomerom r_0:

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = mc^2 \tag{7.20}$$

Klasický polomer elektrónu nemá priamy fyzikálny význam, zjednodušuje ale niektoré výrazy.

4. **Thomsonov rozptyl.**
Rozptyl elektromagnetických vĺn na voľných elektrónoch. Vtedy $\omega_0 = 0$ a účinný prierez

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \times r_0^2 \tag{7.21}$$

nezávisí od frekvencie.

5. **Raylighov rozptyl.**
Rozptyl na malých objektoch (atómy, molekuly). Energia "vlastných kmitov" elektrónu v atóme je väčšia, ako frekvencia viditeľného svetla:

$$\omega_0 \gg \omega \tag{7.22}$$

Preto v menovateli vzťahu (7.18) zanedbáme ω a dostaneme účinný prierez

$$\sigma \sim \omega^4 \tag{7.23}$$

Preto sa v atmosfére podstatne viac rozptyľuje modrá zložka svetla, ako červená (modrá obloha). Pozri aj časť 7.4.

6. **Mie rozptyl**
   Rozptyl na väčších objektoch: koherentné oscilácie viacerých nábojov – nárast rozptylu pre väčšie vlnové dĺžky (biele oblaky).

7. Rozptyl na malých kovových časticiach: plazmónové oscilácie: v okolí nanočastíc sa pole zosilní o mnoho rádov.

8. **Lambertov - Beerov zákon**
   Predpokladajme, e sa elektromagnetická vlna šíri priestorom, v ktorom je prítomných veľa rovnakých častíc, na ktorých sa môže rozptýliť. Zaujíma nás, ako závisí intenzita prechádzajúceho svetla od dráhy, ktorú v takomto priestore vlna prejde (obr. 7.3).

   Zaujíma nás množstvo energie prechádzajúcej plochou S =1m^2. Ak je koncentrácia častíc N tak množstvo častíc v objeme $S\Delta x$ je $NS\Delta x$. Energia, ktorá sa v takomto objeme rozptýli, je potom

$$I(x)N\sigma\Delta x \tag{7.24}$$

   Pre intenzitu preto dostaneme rovnicu

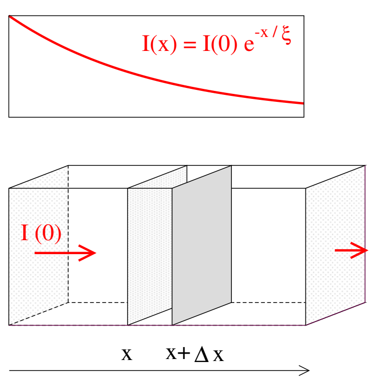
$$I(x+\Delta x) = I(x) - I(x)N\sigma\Delta x \tag{7.25}$$

   resp.

$$\frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = -N\sigma I(x) \tag{7.26}$$

   z čoho dostaneme exponenciálny pokles intenzity svetla:

$$I(x) = I_0 e^{-N\sigma x} = I_0 e^{-x/\xi} \tag{7.27}$$



Obr. 7.3. Lambert - Beerov zákon. Elektromagnetická vlna prechádza trubicou plochy S. V objeme trubice sú rozptylové centrá s koncentráciou N centier v 1 m^3. Každé rozptylové centrum je charakterizované účinným prierezom σ. Horný obrázok ukazuje exponenciálny pokles intenzity prechádzajúcej vlny.

Intenzita vlny teda exponenciálne klesá s charakteristickou dĺžkou

$$\xi = \frac{1}{N\sigma} \tag{7.28}$$

Meraním intenzity je teda možné nájsť účinný prierez alebo koncentráciu častíc. Lambertov-Beerov zákon je účinným nástrojom analýzy látok v chémii a biológii.

7.4 Prechod svetla atmosférou

1. **Účinný prierez svetla v atmosfére** Pri štúdiu prechodu svetla atmosférou je výhodné vyjadriť účinný prierez pomocou indexu lomu. Porovnajme rovnicu (7.18)

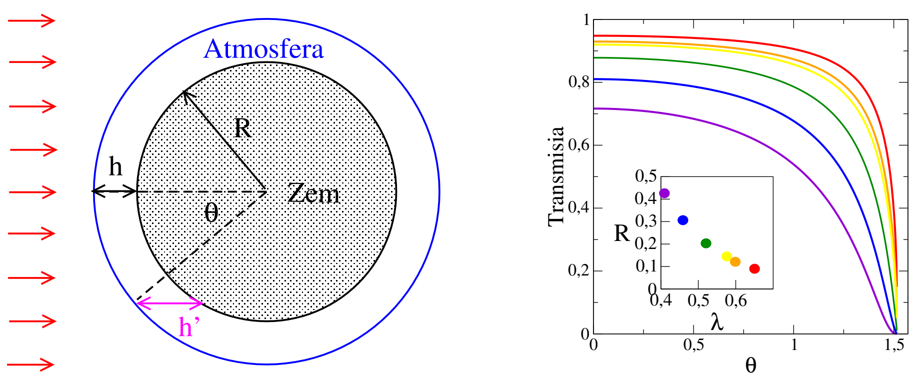
$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{\omega^4}{c^4}\left[\frac{q^2}{\epsilon_0 m}\frac{1}{(\omega^2-\omega_0^2)}\right]^2 \tag{7.29}$$

so vzťahom pre relatívnu permitivitu ϵ_r. Dostaneme

$$\sigma = \frac{1}{6\pi}k^4\frac{(\epsilon_r-1)^2}{N^2} \tag{7.30}$$

kde $k = \omega/c$ je vlnový vektor dopadajúceho žiarenia a ϵ_r je relatívna permitivita vzduchu, daná rovnicou (2.16):

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}, \qquad \omega_p^2 = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \tag{7.31}$$



Obr. 7.4. Vľavo: Žiarenie prichádzajúce zo Slnka (červené šípky) prechádza atmosférou. Hrúbka atmosféry je h (na obrázku je kvôli názornosti nakreslená podstatne hrubšia, ako je skutočná). Dráha, ktorú žiarenie prechádza v atmosfére, závisí od polohy, danej uhlom θ. Vidíme, že dráha $h' > h$. Preto sa žiarenie viac rozptyľuje v oblastiach, kde je uhol θ veľký a dráha žiarenia v atmosfére dlhšia. To potvrdzuje pravý obrázok, ktorý ukazuje, aká časť viditeľného svetla prejde atmosférou a dopadne na povrch Zeme, v závislosti od uhla θ. Vnútorný obrázok ukazuje, aká časť svetla sa v atmosfére rozptýli v závislosti od farby.

(zanedbali sme stratový člen $i\gamma$). Permitivitu vyjadríme pomocou indexu lomu: je

$$\epsilon_r - 1 = n^2 - 1 = (n+1)(n-1) \approx 2(n-1) \tag{7.32}$$

lebo $n \sim 1$. Potom má účinný prierez tvar

$$\sigma = \frac{2}{3\pi}\frac{k^4}{N^2}(n-1)^2 \tag{7.33}$$

vhodný na meranie indexu lomu vzduchu, resp. meranie Avogadrovej konštanty [2].

2. **Rozptyl svetla v atmosfére** (obr. 7.4)
   V atmosfére je koncentrácia atómov $N \sim 2,7 \times 10^{25}$ m^{-3} a index lomu $n - 1 \approx 2,78 \times 10^{-4}$. Dostaneme tak atenuačnú dĺžku $\xi = 1/\sigma n$ (rovnice 7.27 a 7.28) $\xi = 30$ km (fialová), = 188 km (červená) [11]. Ak má atmosféra hrúbku 10 km, rozptýli sa v nej $1 - e^{-10/30} = 0,28$ dopadajúceho fialového svetla, ale len $1 - e^{-10/188} = 0,05$ červeného. Preto je obloha modrá. Rozdiel v rozptýlených farbách je ešte výraznejší pri západe (východe) Slnka, kedy svetlo dopadá na Zem pod veľkým uhlom a preto prechádza hrubšou vrstvou atmosféry. Rozptýlia sa takmer všetky farby okrem červenej.

3. **Hmla**
   Rozptyl prechádzajúceho svetla na kvapkách vody; v hmle majú kvapky rozmer rádovo jednotky až desiatky μm. Rozptyl svetla nezávisí od vlnovej dĺžky (rozptýlené svetlo je biele) a opisujeme ho v rámci teórie Mie.

7.5 Iné príklady rozptylu svetla

1. Experiment s roztokom kyseliny sírovej a thiosíranu sodného[1]: chemickou reakciou sa vylučujú zrniečka síry, na ktorých možno pozorovať Rayleighov rozptyl: z prechádzajúceho svetla sa rozptyľuje najprv modrá časť spektra. Zrniečka rastú, takže v priebehu niekoľkých minút sa rozptyl mení: v celom objeme sa rovnako rozptyľujú všetky farby

2. Rozptyl na na časticiach
   Kovové nanočastice (guľôčky rozmerov niekoľko až desiatky nanometrov) obsahu voľné elektróny. Pre určitú frekvenciu svetla nastáva rezonancia, preto materiál obsahujúci takéto nanočastice môže byť farebný. Nanočastice sa využívajú na rozptyl (a odraz) ultrafialového žiarenia (opaľovacie krémy), vo fyzikálnych experimentoch napr. na zosilnenie dopadajúceho EM signálu (v rezonancii intenzita poľa v okolí guľôčky mnohonásobne narastie).

[1]Thiosíran sodný: $Na_2S_2O_3 \cdot 5H_2O$

KAPITOLA 8

Geometrická optika I

8.1 Princípy geometrickej optiky

Literatúra [3], kap. 10, [8], [4], kap. 6,4

1. **Podmienky platnosti geometrickej optiky**
   Nekonečne malá vlnová dĺžka svetla, resp. malá v porovnaní s veľkosťou objektov, cez ktoré vlna prechádza, resp. s nimi interaguje.

   $$\lambda \ll r \tag{8.1}$$

   r je typická veľkosť objektov.

   V geometrickej optike sa šírenie EM vĺn (svetla) opisuje pomocou lúčov vychádzajúcich zo zdroja.

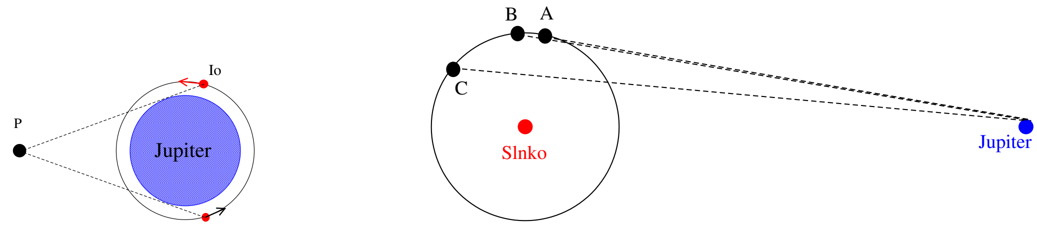
2. **Meranie rýchlosti svetla**
   Romer (1672) - odhadol rýchlosť svetla z pozorovania východu Jupiterovho mesiaca Io (obrázok 8.1).

   Laboratórne metódy:
   Na obrázku 8.2 dopadá svetlo na rýchlo sa otáčajúci hranol, od ktorého sa odráža. Ak sa v čase t odrazí smerom k zrkadlu, na ktoré dopadá kolmo, vráti sa v čase $t + \Delta t$ spať k hranolu. Čas Δt je daný (neznámou) rýchlosťou svetla:

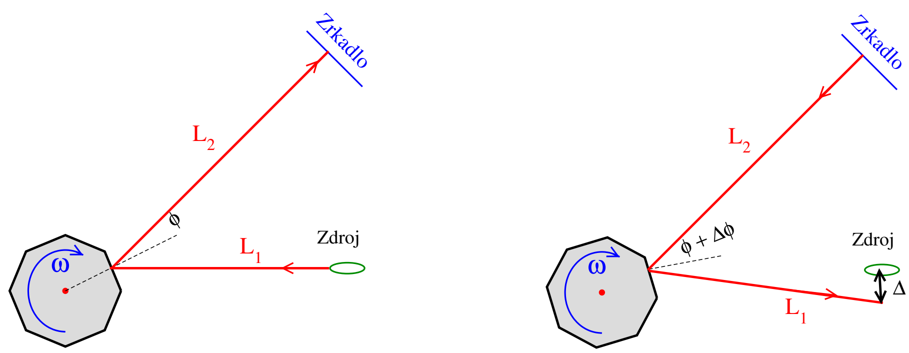
   $$\Delta t = \frac{2L_2}{c} \tag{8.2}$$

   Za ten čas sa ale hranol pootočil o uhol $\Delta\phi = \omega\Delta t$, preto je smer odrazeného lúča pootočený o uhol $2\Delta\phi$. Na tienidlo teda dopadne vo vzdialenosti

   $$\Delta = L_1 2\Delta\phi = 2L_1\omega\Delta t = \frac{4L_1L_2}{c}\omega \tag{8.3}$$



Obr. 8.1. Vľavo: pozorovateľ, ktorý sa vzhľadom k Jupiteru nehýbe, pozoruje obeh mesiaca Io: Obeh je periodický s periódou $T \approx 42,5$ hod. S touto periódou mesiac vychádza z tieňa Jupitera (červená šípka). Vpravo: pozorovateľ sa pohybuje na Zemi. Pretože sa od Jupitera vzďaľuje rýchlosťou 30 km/s (rýchlosť obehu Zeme okolo Slnka), a pretože rýchlosť svetla je konečná, pozoruje každý ďalší východ mesiaca Io s oneskorením. Zem bola v bode A 7. marca a východ Io bol pozorovaný o 07:58:25; v bode B bol pozorovaný východ Io 14. marca o 09:52:30, z čoho plynie doba obehu Io okolo Jupitera 42 hodín, 28 minút a 31,25 sek. Dňa 29. apríla bola Zem v bode C; medzičasom bolo pozorovaných 30 východov mesiaca Io, posledný 29. apríla o 10:30:06, teda o 45 minút neskôr, ako keby Zem stála. Oneskorené pozorovanie východu mesiaca Io je spôsobené tým ze svetlo musí od Jupitera k Zemi prejsť stále dlhšiu dráhu. Zo známej polohy Zeme a Jupitera Romer odhadol rýchlosť svetla $c \approx 220\,000$ km/s.

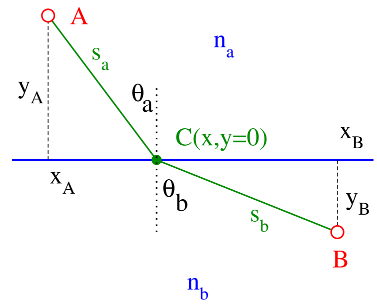


Obr. 8.2. Meranie rýchlosti svetla: vľavo: svetlo vychádza zo zdroja a dopadá na rýchlo sa otáčajúci osemboký hranol. V čase t je hranol natočený práve tak, že svetlo sa odráža k zrkadlo vpravo hore. Na zrkadlo dopadá kolmo a odráža sa späť k hranolu. Pravý obrázok: v čase $t + \Delta t$ svetlo dopadá opäť na hranol; ten sa al medzičasom pootočil o uhol $\Delta\phi$, preto je svetlo po odraze od hranole vychýlené.

Napríklad ak $L_1 = 5$ m, $L_2 = 5$ m a rýchlosť otáčok $\omega = 2\pi f$, $f = 10^3$ Hz, očakávame $\Delta \sim 2$ mm. Z tohto vzťahu nájdeme rýchlosť svetla

$$c = \frac{4L_1L_2}{\Delta}\omega \tag{8.4}$$

Iné metódy merania rýchlosti svetla nájdete napr. v [4, 5].



Obr. 8.3. Odvodenie Snellovho zákona z Fermatovho princípu

3. **Fermatov princíp.**
V nehomogénnom prostredí s indexom lomu $n(\vec{r})$ sa svetlo síri po takej dráhe s medzi dvoma bodmi A a B, na ktorej je integrál

$$F_{AB} = \int_A^B n(\vec{r}) ds \tag{8.5}$$

minimálny. Úloha nájsť dráhu svetla sa teda formuluje ako variačná úloha pre funkciu s.

4. Snellov zákon odvodený z Fermatovho princípu (obr. 8.3).
Dráha svetla z bodu A do bodu B cez rozhranie medzi dvoma homogénnymi pozostáva z dvoch lineárnych úsekov AC a CB. Polohu bodu C nájdeme z Fermatovho princípu. Integrál má hodnotu

$$F_{AB} = n_a s_a + n_b s_b \tag{8.6}$$

ktorú môžeme minimalizovať vzhľadom na polohu bodu C:

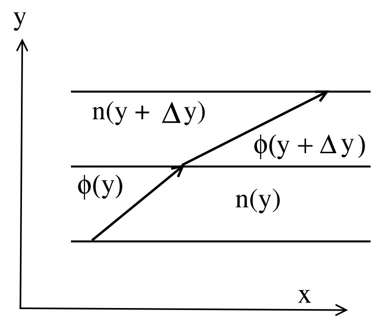
$$\frac{\partial F_{AB}}{\partial x} = 0 \tag{8.7}$$

Pretože $\partial s_a/\partial x = (x - x_a)/s_a = \sin\theta_a$ $\partial s_b/\partial x = (x - x_b)/s_a = -\sin\theta_b$ dostaneme z podmienky (8.7) Snellov zákon $n_a \sin\theta_a = n_b \sin\theta_b$.

8.2 Svetlo v nehomogénnom prostredí

1. Šírenie svetla v gradientných systémoch: "**index guiding**"
Uvažujme prostredie, v ktorom sa index lomu mení len v smere y (obr. 8.4). Nájdime dráhu svetla. Materiál si predstavíme ako systém nekonečne tenkých vrstiev v smere y. V každej vrstve definujeme $n(y)$ a smer šírenia vlny $\theta(y)$. Zo Snellovho zákona na rozhraní medzi dvoma vrstvami dostaneme

$$n(y)\cos\phi(y) = n(y + \Delta y)\cos\phi(y + \Delta y) \tag{8.8}$$



Obr. 8.4. Odvodenie rovnice šírenia svetla v systéme, kde $n = n(y)$. Index lomu závisí len od y. Dráha svetla je $y = y(x)$.

(všimnime si, že uhol $\phi = \pi/2 - \theta$). Rozvinieme pravú stranu do Taylorovho radu

$$n(y + \Delta y) = n(y) + (\partial n/\partial y)\Delta y \tag{8.9}$$

$$\cos\phi(y + \Delta y) = \cos\phi(y) - \sin\phi(y)(\partial\phi/\partial y)\Delta y \tag{8.10}$$

a ponecháme len členy $\sim \Delta y$:

$$\frac{\partial n}{\partial y} = n\,\frac{\partial \phi}{\partial y}\tan\phi \tag{8.11}$$

Na pravej strane využijeme vzťah

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}\tan\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\tan\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{8.12}$$

lebo

$$\tan\phi = \frac{\partial y}{\partial x} \tag{8.13}$$

Ak predpokladáme

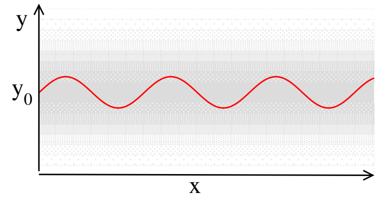
$$\tan\phi \approx \phi \tag{8.14}$$

dostaneme na pravej strane

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{8.15}$$

Takže pre dráhu svetelného lúča dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{n(y)}\frac{\partial n}{\partial y} \tag{8.16}$$



Obr. 8.5. Dráha lúča (červená plná čiara) v štruktúre, v ktorej sa index lomu mení ako funkcia y: najvyšší je v prostriedku a klesá na obe strany smerom k okraju. Lúč osciluje okolo oblasti s najvyšším indexom lomu (rovnica 8.19).

Príklad: uvažujme materiál, v ktorom sa index lomu mení podla vzťahu

$$n^2(y) = n_0^2\left[1 - \alpha^2(y - y_0)^2\right] \tag{8.17}$$

(taký sa dá komerčne kúpiť). Pre $\alpha^2(y - y_0)^2 \ll 1$ dostaneme

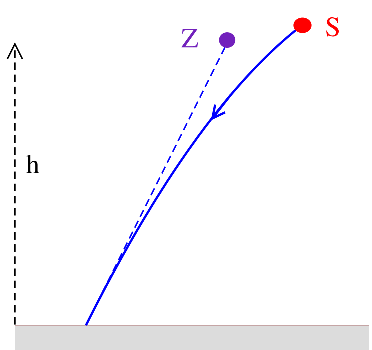
$$n(y) = n_0\left[1 - \frac{1}{2}\alpha^2(y - y_0)^2\right] \tag{8.18}$$

Ak zanedbáme všetky vyššie členy $\propto \alpha(y - y_0)$, dostaneme z rovnice (8.13) rovnicu harmonického oscilátora, a dráha svetelného lúča

$$y(x) = y_0 + y_1 \sin(\alpha x) \tag{8.19}$$

osciluje okolo lineárnej dráhy $y = y_0$, kde je index lomu najväčší, ale neopúšťa oblasť s vyšším indexom lomu (index guiding – obr. 8.5).

2. Šírenie svetla v atmosfére (obr. 8.6): zmena smeru lúča vplyvom závislosti hustoty vzduchu od výšky (a s tým súvisiacej zmeny indexu lomu) - **astronomická refrakcia**.



Obr. 8.6. Astronomická refrakcia: svetlo z hviezdy S prichádza k pozorovateľovi na povrchu Zeme pod zakrivenej dráhe, pretože index lomu vzduchu narastá s klesajúcou výškou (svetlo vždy prechádza do stále hustejšieho prostredia). Pozorovateľ preto mylne usudzuje, že hviezda leží v zdanlivej polohe Z.

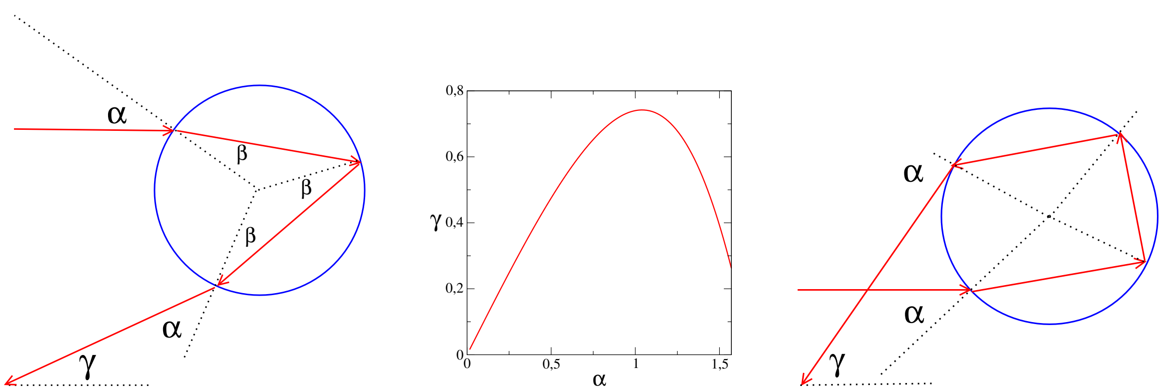
3. Fata Morgana – zakrivenie smeru lúča vplyvom nehomogenity indexu lomu (zohriaty vzduch je redší ako studený).

4. **Dúha**
   Svetlo dopadá na kvapky podstatne väčšie, ako je vlnová dĺžka, preto sa svetlo láme na povrchu kvapky podľa Snellovho zákona. Dopadajúce svetlo (šíriace sa horizontálne zo Slnka) sa láme na kvapke; uhol, pod ktorým vychádza, závisí od počtu odrazov, ktoré lúč absolvuje vo vnútri kvapky (obr. 8.7) samozrejme aj od uhla α, pod ktorým svetlo na kvapku dopadá. Najväčšiu intenzitu pozorujeme na povrchu zeme pod uhlom γ_c, ktorý najmenej závisí od α:

$$\left.\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\right|_{\gamma=\gamma_c} = 0 \qquad (8.20)$$

   (pozri obr. 8.7. Pretože γ_c závisí od od frekvencie, vidíme jednotlivé farby vychádzať pod rôznymi uhlami.

5. Eikonál – opis šírenia elektromagnetickej vlny v nehomogénnom prostredí v limite malej vlnovej dĺžky. Pozri [3].



Obr. 8.7. Lom svetla na kvapke vody. Vľavo: lúč sa odráža od vnútorného okraja kvapky jedenkrát, (prípad jednoduchej dúhy) vpravo: dvakrát (prípad dvojitej dúhy). Obrázky sú len schematické. Vychádzajúci lúč pozorujeme na Zemi pod uhlom γ. Intenzita vychádzajúceho lúča závisí od uhla α, ktorý samozrejme závisí od miesta, na ktoré slnečný lúč na kvapku dopadne. Stredný obrázok ukazuje γ ako funkciu α pre obyčajnú dúhu (ľavý obr.). Dúhu vidíme pod uhlom γ_c, pri ktorom $\partial\gamma/\partial\alpha = 0$. Samozrejme, γ_c závisí od indexu lomu. Napr. pre $n = 1,3324$ je pre jednoduchú dúhu $\gamma_c \approx 42^o$, pre dvojitú dúhu $\gamma_c = 51^o$. Pretože index lomu kvapky závisí od frekvencie, líšia sa tieto uhly pre jednotlivé farebné zložky svetla, preto sa biele svetlo na kvapke rozkladá a vidíme dúhu. Pri dvojitej dúhe je poradie farieb opačné.

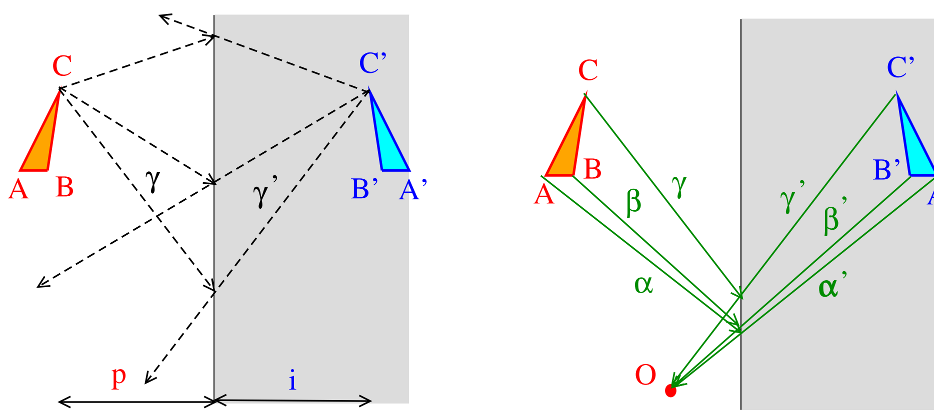
KAPITOLA 9

Geometrická optika II

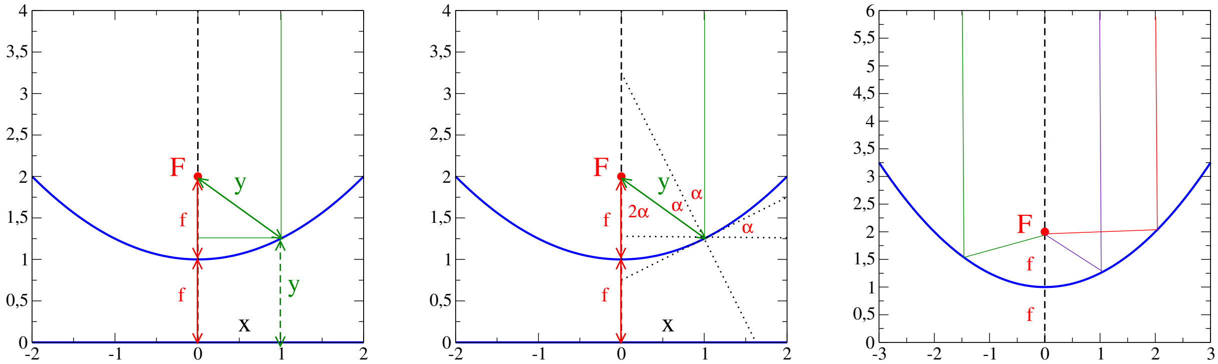
9.1 Zrkadlá

1. **Rovinné zrkadlo**
   vytvára *virtuálny obraz* za zrkadlom, v rovnakej veľkosti aj orientácii. (obr. 9.1)

2. **Parabolické zrkadlo**, ohnisko (obr. 9.2).
   Hľadajme krivku $y(x)$ takú, ktorej body majú rovnakú vzdialenosť od priamky $y = 0$ aj



Obr. 9.1. Rovinné zrkadlo. Vľavo: zrkadlo vytvorí z predmetu ABC jeho obraz A'B'C'. Napr. lúče z bodu C sa odrážajú od zrkadla; v priestore za zrkadlom sa pretínajú v bode C' a vytvárajú tak virtuálny obraz bodu C. Predmetová vzdialenosť bodu C je p, obrazová vzdialenosť je i. Pre rovinné zrkadlo platí $p = |i|$ (keďže ide o virtuálny obraz, i má záporné znamienko). Pravý obrázok ukazuje, ako v zrkadle vidíme virtuálny obraz: pri akejkoľvek polohe oka O do neho dopadnú niektoré lúče, vychádzajúce z bodov A,B a C a vytvárajú tak v oku virtuálny obraz predmetu.



Obr. 9.2. Ľavý obrázok: hľadáme funkciu $y(x)$, ktorej body sú rovnako vzdialene od priamky $y = 0$ aj od bodu F. Stredný: odraz lúča, rovnobežného s osou y, od paraboly. Všetky lúče, rovnobežné s osou y, sa po odraze stretnú v bode F.

od bodu $F = (2f, 0)$ (ľavý obrázok 9.2). Z obrázku vidíme, že musí platiť

$$y^2 = x^2 + (2f - y)^2 \tag{9.1}$$

a teda

$$y = f + \frac{1}{4f}x^2 \tag{9.2}$$

Ide teda o parabolu.
Ak na parabolu dopadajú lúče, rovnobežné s osou y, všetky sa po odraze od paraboly stretnú v bode F (stredný a pravý obrázok 9.2). Pre uhol dopadu totiž platí

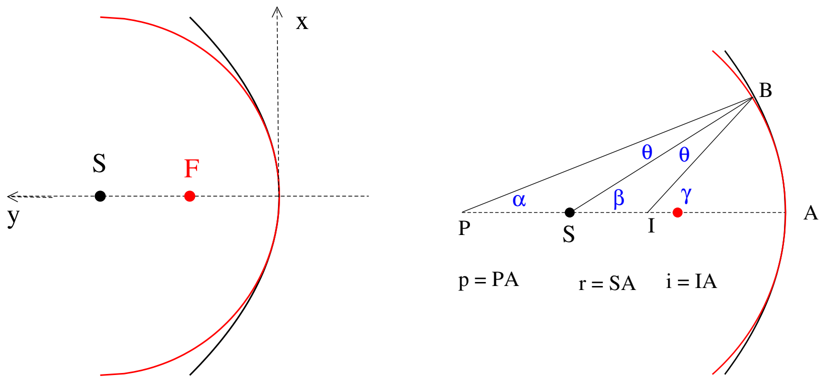
$$\tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{2f} \tag{9.3}$$

a zároveň platí

$$\tan 2\alpha = \frac{x}{2f - y} \tag{9.4}$$

Oba vzťahy pre α sú splnené, ak platí rovnica (9.2). Všetky lúče sa nielen stretnú v ohnisku F, ale ak boli predtým vo fáze, stretnú sa v F vo fáze, pretože na ceste do ohniska prekonajú rovnakú dráhu.

3. **Paraxiálna aproximácia**
Uvažujeme len lúče v blízkosti optickej osi, ktoré s optickou osou zvierajú len malý uhol. Guľová plocha sa k takýmto lúčom správa podobne ako parabolická. Preto budeme v ďalšom používať guľové zrkadlá (a guľové lámavé plochy).



Obr. 9.3. Vľavo: Aproximácia parabolického zrkadla (čierne) guľovou plochou. Je vidieť, že aproximácia je veľmi dobrá, pokiaľ x nie je príliš veľké – teda pokiaľ uvažujeme len lúče v blízkosti optickej osi $x = 0$. (Pozor: os y je horizontálna, os x je vertikálna !) Vyznačená je poloha ohniska F a stredu guľovej plochy S. Vpravo: odvodenie zobrazovacej rovnice (9.12) v rámci paraxiálnej aproximácie. Predmet P ležiaci na optickej osi sa zobrazí do obrazu I.

4. **Guľové zrkadlá**
   Aproximácia paraboly guľovou plochou (obr. 9.3). Rovnica gule:

$$(y - r)^2 + x^2 = r^2 \tag{9.5}$$

$$y^2 - 2ry + x^2 = 0 \tag{9.6}$$

   v blízkosti optickej osi je x malé ($x \ll r$) preto aj $y \ll r$). Po zanedbaní y^2 dostaneme rovnicu paraboly

$$y = \frac{1}{2r}x^2 \tag{9.7}$$

   s ohniskovou vzdialenosťou

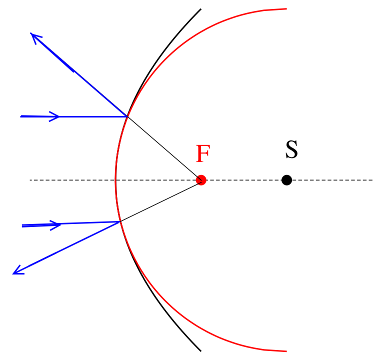
$$f = r/2 \tag{9.8}$$

   Obrázok 9.3 ukazuje, že aproximácia je naozaj veľmi dobrá v blízkosti optickej osi.

5. Dva typy guľových zrkadiel: Konkávne zrkadlo (ľavý obr. 9.3), Konvexné zrkadlo (obr. 9.4).

6. **Zobrazovacia rovnica**
   Vzťah medzi predmetnou vzdialenosťou p a obrazovou vzdialenosťou i (pravý obrázok 9.3). Predmet aj obraz ležia na optickej osi, vzdialenosť predmetu od vrcholu zrkadla je p, vzdialenosť obrazu je i. Medzi uhlami platia vzťahy $\alpha + \theta = \beta$ a $\alpha + 2\theta = \gamma$, z ktorých plynie

$$2\beta = \alpha + \gamma \tag{9.9}$$



Obr. 9.4. Konvexné zrkadlo. Lúče dopadajúce na zrkadlovú plochu sa po odraze rozbiehajú, ako keby vychádzali z ohniska za zrkadlom.

Platí

$$\beta = \frac{AB}{r} \tag{9.10}$$

Uhly α a γ vyjadríme v paraxiálnej aproximácii: predpokladáme, že AB môžeme považovať za úsek kružnice so stredom v P resp. v I. Kružnice majú polomer p, resp. i. Potom platí aj

$$\alpha = \frac{AB}{p}, \qquad \gamma = \frac{Af}{i} \tag{9.11}$$

a po dosadení do rovnice (9.9) dostaneme zobrazovaciu rovnicu

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} \tag{9.12}$$

Pozor na znamienkovú konvenciu: polomer konkávneho zrkadla je kladný, polomer konvexného je záporný. Obrazová vzdialenosť i vyjde zo zobrazovacej rovnice kladná pre reálny obraz a záporná pre virtuálny.

7. **Zobrazovanie zrkadlami**
Obraz väčšieho predmetu nájdeme z priesečníka dvoch lúčov, vychádzajúcich z jeho krajných bodov. Lúče necháme prechádzať (1) cez stred guľovej plochy, (2) cez ohnisko (3) rovnobežne s optickou osou alebo (4) ich necháme odraziť od zrkadla v mieste, kde zrkadlo pretína optickú os.
Pre konkávne zrkadlo je obraz virtuálny (za zrkadlom) ak $p < f$ a reálny a prevrátený, ak $p > f$ (obr. 9.5). Na obr. 9.5 je ukázaná konštrukcia, ako k predmetu ABC zostrojiť obraz A'B'C'. Tri spomínané lúče z bodu C vytvoria jeho obraz c' vo svojom spoločnom priesečníku. Pokus nájsť takto obraz B' bodu B ale nebude úspešný, pretože B leží príliš ďaleko od optickej osi a preto ho guľové zrkadlo nezobrazí (podmienky platnosti paraxiálnej aproximácie nie sú splnené). Pri zobrazení predmetu ABC skutočným zrkadlom

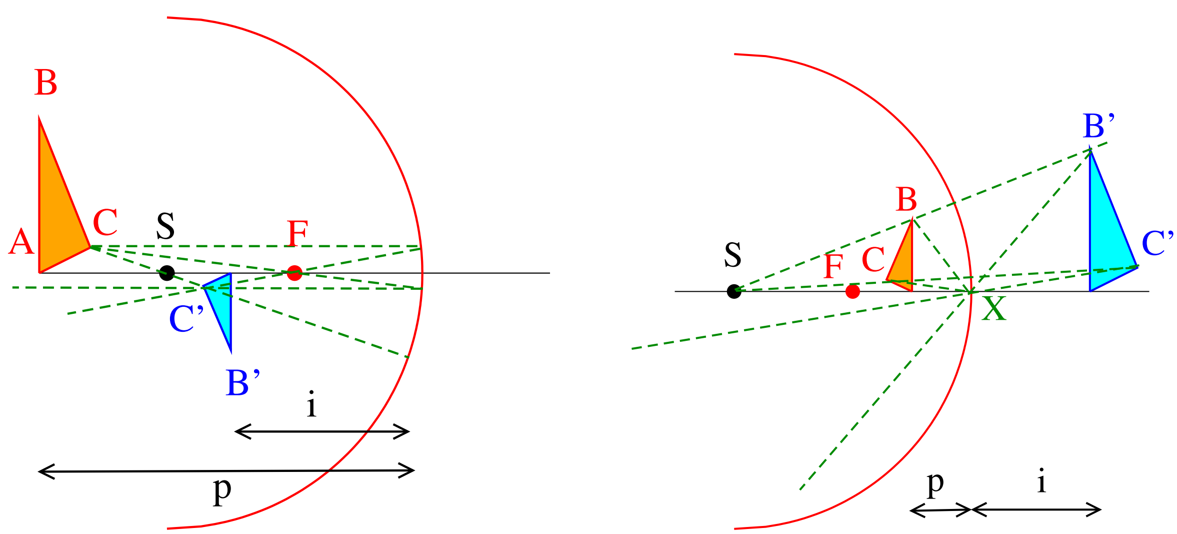
by bol bod B' rozmazaný. Pre konvexné zrkadlo je obraz vždy virtuálny (za zrkadlom), ako ukazuje pravý obrázok 9.5.

8. **Zväčšenie zrkadla**
dostaneme z podobnosti trojuholníkov, napr. ak uvážime lúč, prechádzajúci bodom X na obr. 9.5, tak pre vzdialenosti bodov B a B' od optickej osi platí

$$\frac{x_{B'}}{x_B} = \frac{i}{p} \tag{9.13}$$

Zväčšenie definujeme ako pomer $m = |x_{B'}/x_B|$, preto

$$m = \left|\frac{i}{p}\right| \tag{9.14}$$

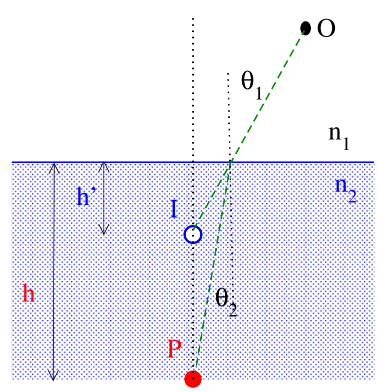


Obr. 9.5. Zobrazenie konkávnym zrkadlom. Podľa konvencie je ohnisková vzdialenosť kladná ($f > 0$). Vľavo je predmet ABC vo vzdialenosti $p = 3f$. Zrkadlo vytvára *reálny* prevrátený obraz A'B'C'. Podľa zobrazovacej rovnice $i = 3/2$ a "zväčšenie" $m = 1/2$. Úlohu predmetu a obrazu môžeme zameniť – zrkadlo rovnako dobre vytvára z predmetu A'B'C' reálny prevrátený obraz ABC. Na pravom obrázku je predmet vo vzdialenosti $p < f$. Zrkadlo vytvára virtuálny obraz ($i < 0$) "za zrkadlom". Pravý obrázok zároveň ukazuje zobrazenie konvexným zrkadlom: teraz je predmetom A'B'C', a virtuálnym obrazom ABC. Konvexné zrkadlo vždy vytvára virtuálny obraz, ktorý je rovnako orientovaný ako predmet, ale zmenšený: pretože $f < 0$ a $p > 0$, vyjde zo zobrazovacej rovnice $i < 0$ a $|i| < p$.

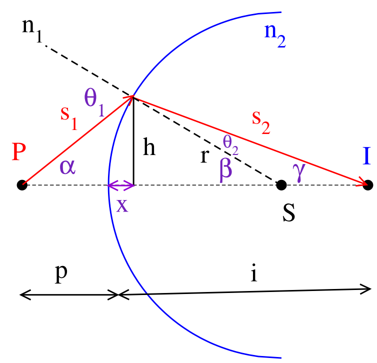
9.2 Lámavé plochy

Literatúra [8], [3], kap. 10

1. Rovinné rozhranie medzi dvoma prostrediami (napr. vodná hladina, povrch skla) - obr. 9.6. Na rozdiel od zrkadiel svetlo prechádza cez rozhranie, pri pohľade zvonku vidíme obraz v tom istom prostredí ako predmet, ale vidíme ho v inej polohe.
   Poloha obrazu sa nájde tak ako pri rovinnom zrkadle: pozorovateľ nepredpokladá lom svetla, obraz leží v predĺžení dráhy lúča, ktorý pozorovateľ deteguje.
   Odhad hĺbky h':
   $$\frac{h'}{h} = \frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} \tag{9.15}$$
   pre uhly platí Snellov zákon $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$. Ak sú uhly θ_1, θ_2 malé, $\sin\theta_1 \approx \tan\theta_1 \approx \theta_1$ a $\sin\theta_2 \approx \tan\theta_2 \approx \theta_2$, rovnica (9.15) sa zjednoduší:
   $$\frac{h'}{h} = \frac{n_1}{n_2} \tag{9.16}$$
2. **Guľová plocha** (obr. 9.7)
   Bod P sa zobrazí do bodu I, ak sa dráhy všetkých lúčov vychádzajúcich z P stretnú v I. Snellov zákon: $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$. Pre malé uhly
   $$n_1\theta_1 = n_2\theta_2 \tag{9.17}$$
   Pretože platí $\theta_1 = \alpha + \beta$ aj $\beta = \theta_2 + \gamma$, dostaneme
   $$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta \tag{9.18}$$



Obr. 9.6. Rovinné rozhranie medzi dvoma prostrediami s rôznymi indexami lomu. Pozorovateľ O vidí predmet P, ležiaci v hĺbke h, v zdanlivej hĺbke h'.



Obr. 9.7. Guľová lámavá plocha *konvexná*. Kvôli názornosti je h zobrazené príliš veľké (rovnica 9.19 platí len v paraxiálnej aproximácii, teda keď sa dráhy lúčov neodchyľujú od optickej osi!). Z Pytagorovej vety dostaneme $(r-x)^2 + h^2 = r^2$. Ak zanedbáme x^2, dostaneme c paraxiálnej aproximácii $x \approx h^2/(2r)$.

Paraxiálna aproximácia: $\alpha \approx h/p$, $\beta \approx h/r$, $\gamma \approx h/i$. Dostaneme zobrazovaciu rovnicu

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r} \tag{9.19}$$

3. Guľová plocha - Fermatov princíp
   Feynman odvádza tú istú rovnicu z Fermatovho princípu: Hodnota integrálu

$$F_{PI} = \int n d\ell \tag{9.20}$$

musí byť tá istá pre každú dráhu lúča, napr. pre priamu dráhu PI, alebo pre dráhu $s_1 + s_2$. Musí teda byť $n_1 s_1 + n_2 s_2 = pn_1 + in_2$, resp.

$$n_1(s_1 - p) + n_2(s_2 - p) = 0 \tag{9.21}$$

Z obrázku 9.7 dostaneme (Pytagorova veta)

$$s_1^2 = (p+x)^2 + h^2 \tag{9.22}$$

Pre malé h aproximujeme $s_1^2 - p^2 = (s_1 + p)(s_1 - p) \approx 2p(s_1 - p)$ a po dosadení do rovnice 9.22

$$2p(s_1 - p) \approx 2px + x^2 + h^2 \tag{9.23}$$

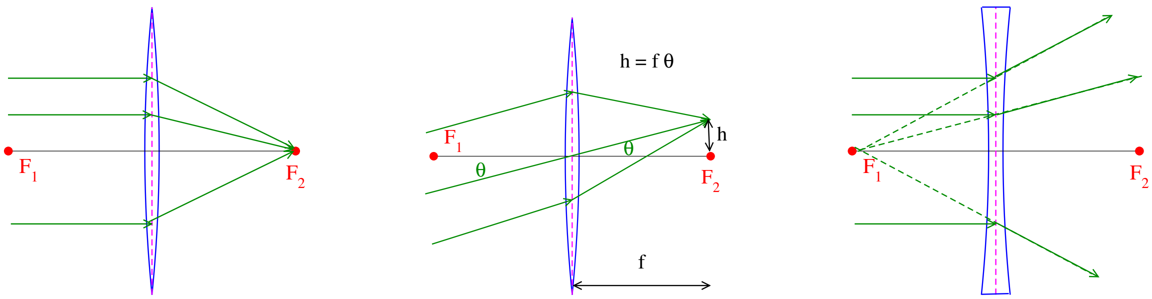
na pravej strane zanedbáme x^2 a využijeme $x \approx h^2/(2r)$, takže

$$s_1 - p = \frac{h^2}{2r} + \frac{h^2}{2p} \tag{9.24}$$

podobne

$$s_2 - i = -\frac{h^2}{2r} + \frac{h^2}{2i} \tag{9.25}$$

Dosaďme tieto výrazy do rovnice (9.21) a dostaneme zobrazovaciu rovnicu (9.19).



Obr. 9.8. Spojka (vľavo): lúče, rovnobežné s optickou osou, sa stretnú v ohnisku. Ak lúče zvierajú s optickou osou malý uhol θ, stretnú sa v ohniskovej rovine vo vzdialenosti $h \approx f\theta$. Rozptylka: rovnobežné lúče sú rozptýlené, ako keby vychádzali z ohniska F_1.

4. Guľová plocha: konvexná a konkávna. pre obe platí rovnica (9.19), ale pre konkávnu plochu je polomer r záporný. (pozor, je to naopak, ako v prípade zrkadiel!). Znamienko i je záporné, ak ide o virtuálny obraz.

5. **Šošovky**
   Kombinácia dvoch guľových plôch (obr. 9.8). Zobrazovacia rovnica šošovky:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}, \qquad \frac{1}{f} = (n-1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \tag{9.26}$$

6. **Spojka**
   Pozri ľavý obr. 9.8): podľa konvencie je $r_1 > 0$ a $r_2 < 0$. Ak $r_1 = -r_2$, tak

$$\frac{1}{f_{\text{spojka}}} = (n-1)\frac{2}{r} \tag{9.27}$$

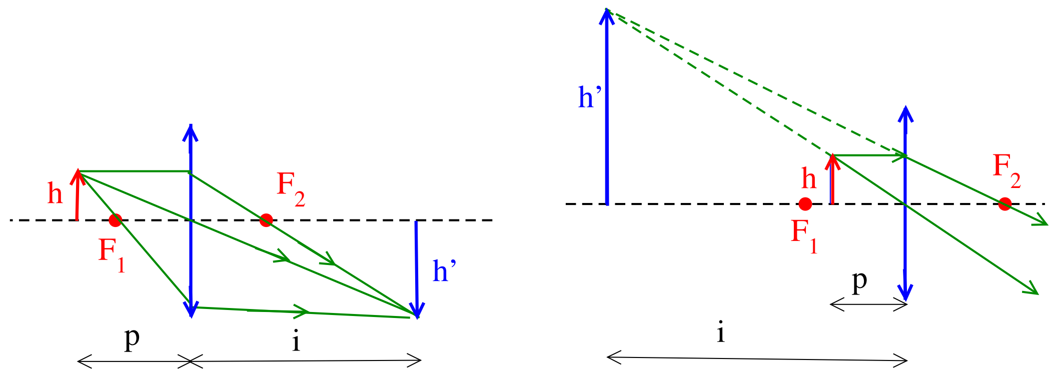
   Lúče, rovnobežné s optickou osou, sa po prechode spojkou stretnú v ohnisku (obr. 9.8). Podobne rovnobežné lúče, ktoré s optickou osou zvierajú malý uhol θ, sa po prechode spojkou stretnú v jednom bode, ktorého vzdialenosť od optickej osi je $h \approx f\theta$ (obr.

7. **Rozptylka**
   Pozri pravý obr. 9.8) $r_1 < 0$, $r_2 > 0$; ak $|r_1| = |r_2|$, tak

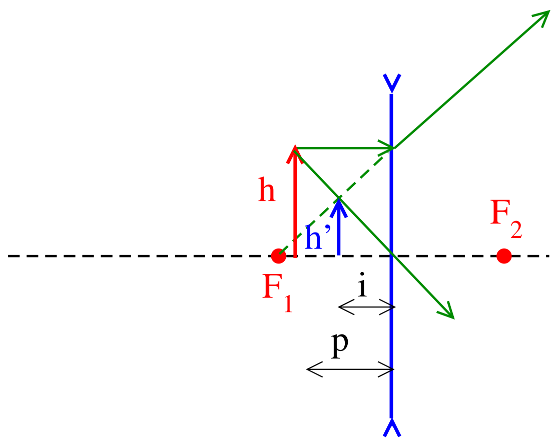
$$\frac{1}{f_{\text{rozptylka}}} = -(n-1)\frac{2}{r} \qquad (r < 0) \tag{9.28}$$

   rozptylka "rozptyľuje" rovnobežné lúče.

8. Odvodenie zobrazovacej rovnice (9.26): dvojnásobným použitím rovnice (9.19) pre dve za sebou umiestnené lámavé plochy.



Obr. 9.9. Zobrazenie spojkou. Vľavo: $p > f$. Spojka vytvára reálny prevrátený obraz, $i > 0$ (ako plynie z rovnice 9.26). Vpravo: $p < f$ Spojka vytvára virtuálny vzpriamený obraz (na tomto princípe zväčšuje lupa).



Obr. 9.10. Zobrazenie rozptylkou. Obraz je vždy virtuálny.

9. **Zobrazenie šošovkou**
   Na zobrazenie použijeme tri lúče: lúč rovnobežný s optickou osou, lúč prechádzajúci stredom šošovky a lúč prechádzajúci ohniskom. Zväčšenie šošovky

$$m = \frac{h'}{h} = \frac{|i|}{p} \tag{9.29}$$

   ako u guľových zrkadiel.

   - Zobrazenie spojkou (obr. 9.9). Ohnisková vzdialenosť $f > 0$. Vytvorený obraz závisí od polohy predmetu. Obraz je reálny, ak $f > p$, ako plynie zo zobrazovacej rovnice (9.26). Pre $p < f$ je obraz virtuálny.
   - Zobrazenie rozptylkou (obr. 9.10). Ohnisková vzdialenosť $f < 0$. Obraz je vždy virtuálny.

9.3 Optické zobrazovanie

Literatúra: [3], kap. 10, [4], [8].

1. Optické prvky: hranol, polopriepustná vrstva, šošovka [4].

2. Maticová optika.
   Každý lúč v danom bode na optickej osi charakterizujú dva parametre:
   y ... vzdialenosť od optickej osi
   θ ... uhol, ktorý zviera s optickou osou.
   Pri prechode optickým prvkom sa obe veličiny zmenia:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \tag{9.30}$$

   Matica **M** charakterizuje optický prvok. Vzťah (9.30) je lineárny, preto platí len v paraxiálnej aproximácii (malé vzdialenosti od optickej osi, malé uhly, takže $\sin\theta \approx \theta$, tan $\theta \approx \theta$.

3. Z rôznych optických prvkov môžeme zostaviť optickú sústavu (dve lámavé plochy vytvoria šošovku, dve šošovky ďalekohľad apod.). Optickú sústavu zloženú z N prvkov charakterizuje matica

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_N \mathbf{M}_{N-1} \ldots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \tag{9.31}$$

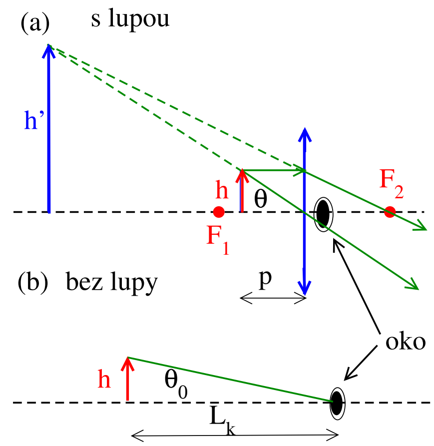
   (matice sa násobia v opačnom poradí, pretože lúč je najprv transformovaný prvkom 1, potom 2, atď.).

4. **Lupa**
   Predmet výšky h vidíme voľným okom pod uhlom $\theta_0 \approx h/L$, kde L je vzdialenosť predmetu od oka. Predmet vidíme lepšie, keď je θ_0 väčšia, čo sa dá dosiahnuť len priblížením predmetu k oku. Vzdialenosť L ale nemôžeme ľubovoľne zmenšovať, pretože oko má konvenčnú vzdialenosť $L_k \approx 25$ cm – predmety bližšie k oku vidíme rozmazané. Uhol ale môžeme zväčšiť pomocou spojky (obrázok 9.11): ak pred oko položíme spojku a predmet umiestnime tesne pred jej ohniskovú vzdialenosť ($p \approx f$), vidíme obraz pod uhlom $\theta = h/p \approx h/f$. Zväčšenie lupy je potom definované pomerom

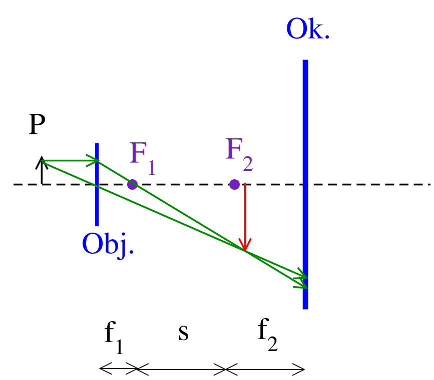
$$m = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{L_k}{f} \tag{9.32}$$

5. **Mikroskop**
   Najjednoduchší mikroskop pozostáva z dvoch spojok (obr. 9.12). Objektív vytvára zväčšený prevrátený obraz tesne pred ohniskovou vzdialenosťou okuláru. Okulárom pozorujeme tento obraz ako lupou.
   Zväčšenie mikroskopu:

$$m = \frac{s}{f_1}\frac{L_k}{f_2} \tag{9.33}$$



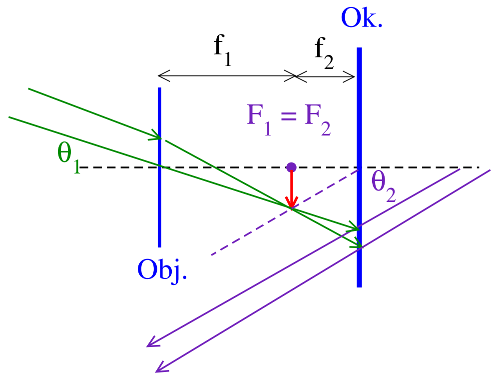
Obr. 9.11. Zväčšenie lupou. Predmet veľkosti h umiestnený tesne pred ohnisko šošovky (na obrázku je $p < f$, inak by bol obraz h' mimo rámec obrázku) sa zobrazí ako h'. Ak priložíme oko blízko k šošovke, vidíme ho pod uhlom θ. Ak ten istý predmet pozorujeme voľným okom, vidíme ho pod uhlom θ_0. Tento uhol by sme zväčšili len priblížením predmetu k oku, ale to nemá význam, pretože predmety bližšie ako $L_k \approx 25$ cm už vidíme rozmazané.



Obr. 9.12. Štruktúra najjednoduchšieho mikroskopu, v ktorom objektív aj okulár sú zložené z jedinej spojnej šošovky. Objektív zobrazí predmet (modrá šípka) do obrazu (červená šípka), ktorý je umiestnený tesne pred ohniskom okulára. Tento predmet pozorujeme okulárom ako lupou.

je súčinom zväčšenia objektívu (s/f_1, ako vidíme z podobnosti trojuholníkov na obr. 9.12) a zväčšenia "lupy" (okulára).

6. **Ďalekohľad** V ďalekohľade ležia ohniská objektívu a okuláru v tom istom bode (obr. 9.13). Predmet je vzdialený ďaleko ("v nekonečne"), preto všetky lúče, vychádzajúce z jeho krajného bodu, prichádzajú do objektívu rovnobežné. Voľným okom by sme ho videli pod uhlom θ_1, ktorý je príliš malý, aby sme v predmete rozoznali detaily. Pomocou objektívu sa ale predmet sa zobrazí v spoločnom ohnisku Takýto predmet pozorujeme Okulárom – do oka nám prichádzajú rovnobežné lúče, preto je obraz opäť v nekonečne. Vidíme ho ale



Obr. 9.13. Štruktúra najjednoduchšieho ďalekohľadu. Predmet leží ďaleko pred objektívom; z jeho krajného bodu dopadajú do objektívu rovnobežné lúče, ktoré sa stretnú v spoločnom ohnisku. Objektív tak vytvorí obraz vzdialeného predmetu (červená šípka) v ohnisku objektívu. Okulár zobrazí tento obraz opäť v nekonečne. Vidíme ho ale pod uhlom $\theta_2 \gg \theta_1$ (na obrázku je uhol θ_1 neúmerne veľký).

pod podstatne väčším uhlom θ_2. Zväčšenie ďalekohľadu je potom

$$m = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{f_1}{f_2} \tag{9.34}$$

7. **Chyby optických sústav**

   - Farebná chyba: index lomu šošovky závisí od frekvencie, preto každá farba "vidí" iné ohnisko. Odstraňuje sa kombináciou šošoviek (napr. achromát: spojka + rozptylka) – využíva sa fakt, že spojka a rozptylka majú opačnú farebnú chybu. Sústava sa nastaví tak, aby mala to isté ohnisko pre dve farby, napr. pre červenú a pre modrú.
   - Odchýlky od paraxiálnej aproximácie: body vzdialené viac od optickej osi sa nezobrazujú dobre.
   - Chyby spôsobené odrazom od povrchu šošoviek – môžu byť odstránené antireflexnými vrstvami (pozri časť 4.2).

8. **Vlnový charakter svetla v geometrickej optike**

   - Pri zobrazovaní sa lúče vychádzajúce z jedného bodu bodu predmetu, musia v zobrazovanom bode stretnúť vo fáze. To zodpovedá Fermatovmu princípu: pretože hodnota integrálu F_{PI} je rovnaká pre všetky lúče, je čas, potrebný na prejdenie ľubovoľného z nich, rovnaký. Tento princíp sme použili pri odvodení zobrazovacej rovnice guľovej lámavej plochy v časti 9.2.
   - **Zovšeobecnený Fermatov princíp**
     Ak sa dve dráhy líšia o menej ako vlnovú dĺžku, je hodnota F_{PI}, prislúchajúca týmto dráham, neodlíšiteľná.

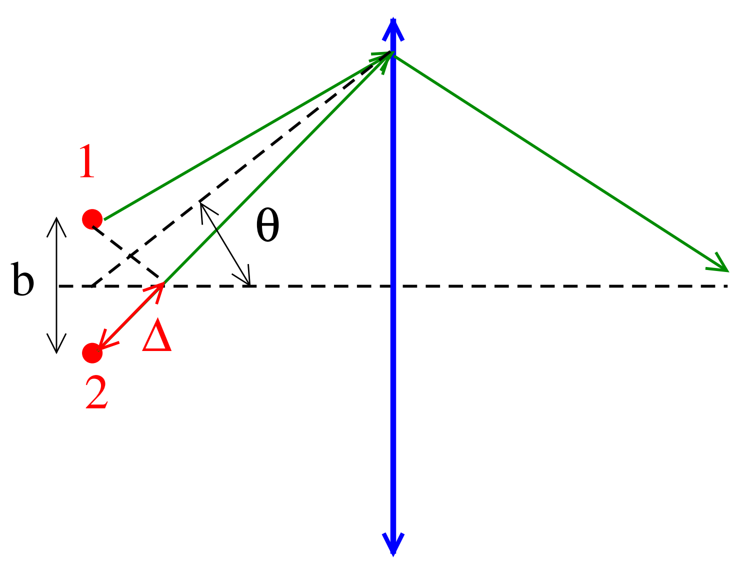
- **Rozlišovacia schopnosť šošovky** (obr. 9.14)
  Ak chceme rozlíšiť dva body, napr. 1 a 2, ktorých vzdialenosť je D, potom sa dráhy, ktoré musí svetlo prekonať, musia líšiť aspoň o vlnovú dĺžku. Inak sa body môžu zobraziť do toho istého obrazu, resp. nie sú v obraze odlíšiteľné. Z obr. 9.14 vidíme, že rozdiel dráh je

$$\Delta = b \sin \theta \tag{9.35}$$

takže podmienka odlíšenia dvoch bodov je

$$b > \frac{\lambda}{\sin \theta} \tag{9.36}$$

čo je podmienka identická s podmienkou (5.15) odvodenou z difrakcie svetla.



Obr. 9.14. Zovšeobecnený Fermatov princíp. Rozlíšenie dvoch bodov 1 a 2 spojkou je možné len vtedy, ak sa dráhy z bodu 1 a 2 od seba líšia o viac ako vlnovú dĺžku svetla, čo zodpovedá podmienke (9.36).

KAPITOLA 10

Elektromagnetické vlny v anizotrópnych materiáloch

Literatúra [3], kap. 13

10.1 Permitivita ako tenzor

1. Fyzikálny pôvod anizotropie: kryštalické materiály, polyméry, organické materiály.

2. **Tenzor permitivity**

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \tag{10.1}$$

   Pre anizotrópne materiály je relatívna permitivita tenzor

$$D_i = \epsilon_0 \sum_j \epsilon_{ij} E_j \tag{10.2}$$

3. **Hustota energie**

$$u = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ij} E_i E_j \tag{10.3}$$

4. Tenzor ϵ_{ij} je symetrický.
   Symetriu tenzora permitivity dokážeme zo vzťahu pre energiu. Odvodíme anizotropnú

verziu Poyntingovej vety pre Poyntingov vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ a časovú zmenu hustoty energie.

$$\begin{aligned} \text{div}\, \vec{S} &= \vec{H} \cdot \text{rot}\, \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot}\, \vec{H} \\ &= -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ &= -\frac{\mu_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \cdot \vec{H} - \epsilon_0 \sum_{ij} \epsilon_{ij} E_i \frac{\partial E_j}{\partial t} \end{aligned} \tag{10.4}$$

Posledný člen potrebujeme vyjadriť ako deriváciu hustoty elektrickej energie, čo je (z rovnice 10.3)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ij} E_i \frac{\partial E_j}{\partial t} + \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial t} E_j \tag{10.5}$$

Preto musí platiť

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial t} E_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ij} E_i \frac{\partial E_j}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{ji} \epsilon_{ji} E_j \frac{\partial E_i}{\partial t} \tag{10.6}$$

(na pravej strane sme len premenovali indexy). Porovnaním ľavej a pravej strany dostaneme, že ϵ je symetrický tenzor:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \tag{10.7}$$

5. **Hlavné osi**
   Permitivita ϵ_{ij} je tenzor; pootočením súradnicových osí je možné dosiahnuť, že tenzor má všetky nediagonálne prvky nulové. Súradnicová sústava, v ktorej toto platí, definuje hlavné osi.

10.2 Elektromagnetické vlny v anizotropnom prostredí – riadny a mimoriadny lúč

1. Obmedzíme sa na najjednoduchší prípad jednoosového kryštálu:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_1, \qquad \epsilon_z = \epsilon_3 \tag{10.8}$$

2. Maxwellove rovnice pre rovinnú EM vlnu

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t]} \tag{10.9}$$

   majú v anizotrópnom materiáli tvar

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu_0 \mu \vec{H} \tag{10.10}$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D} = -\omega \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{10.11}$$

Z Maxwellových rovníc vyplýva, že

$$\vec{H} \perp \vec{k}, \qquad \vec{H} \perp \vec{D}, \qquad \vec{H} \perp \vec{E} \tag{10.12}$$

Ale $\vec{E}$ vo všeobecnosti nie je kolmý ani na $\vec{k}$, ako sme boli zvyknutí v izotrópnych materiáloch, ani nie je rovnobežný s $\vec{D}$. Okrem toho, $\vec{k}$ nie je rovnobežný s Poyntingovým vektorom, ako uvidíme na obrázkoch 10.1, 10.2, 10.3.

3. Predpokladajme, že vlna sa môže šíriť len v rovine yz:

$$\vec{k} = (0, k_y, k_z) \tag{10.13}$$

Vlastnosti elektromagnetickej vlny budú závisieť od jej polarizácie:

4. **Riadny lúč**
Ak $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$, elektrické pole "vidí" len permitivitu $\epsilon_x = \epsilon_1$ a vlna sa šíri ako v izotrópnom prostredí (riadny lúč). Disperzný vzťah pre elektromagnetickú vlnu

$$k_y^2 + k_z^2 = \epsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} \tag{10.14}$$

definuje kružnicu, grupová rýchlosť

$$\vec{v}_g = \mathrm{grad}_{\vec{k}} \omega(\vec{k}) \tag{10.15}$$

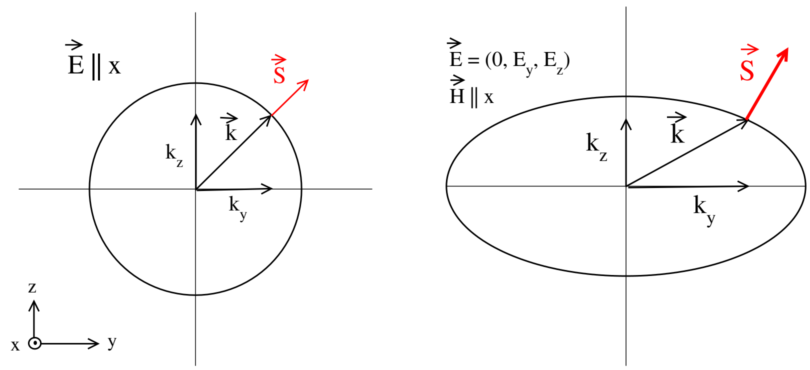
je totožná s fázovou rýchlosťou

$$\vec{v}_f = \frac{\omega}{k} \frac{\vec{k}}{k} \tag{10.16}$$

5. **Mimoriadny lúč**
Ak je vlna polarizovaná s $\vec{E}$ v rovine yz:

$$\vec{E} = (0, E_y, E_z) \tag{10.17}$$

elektrické pole vníma dve rôzne zložky permitivity, $\epsilon_y \neq \epsilon_z$. Tento prípad potrebuje podrobnejšiu analýzu:



Obr. 10.1. Riadny a mimoriadny lúč šíriaci sa v anizotropnom prostredí v rovine yz. Parametre $\epsilon_x = \epsilon_y = 1/2$, $\epsilon_z = 1$. Vľavo: riadny lúč, polarizovaný v smere osi x (kolmo na rovinu papiera). Tak ako v izotrópnom prostredí, plochou konštantnej frekvencie je kružnica (10.14) a $\vec{k} \parallel \vec{S}$. Vpravo: mimoriadny lúč, polarizovaný v rovine yz: $\vec{E} = (0, E_y, E_z)$. Na rozdiel od izotrópneho prípadu, plochou konštantnej frekvencie je elipsa definovaná rovnicou (10.20). Vlnový vektor $\vec{k}$ a Poyntingov vektor $\vec{S}$ nie sú rovnobežné. Vlna sa šíri v smere Poyntingovho vektora, nie v smere vektora $\vec{k}$. Vektor $\vec{E}$ musí byť kolmý na $\vec{S}$, preto nie je kolmý na $\vec{k}$.

6. Z rovnice (10.10) plynie, že $\vec{H}$ má len jednu zložku $\vec{H} = (H_x, 0, 0)$ a platí

$$H_x = \frac{1}{\omega\mu_0}\left[k_y E_z - k_z E_y\right] \tag{10.18}$$

Z rovnice (10.11) vyjadríme zložky elektrickej intenzity

$$E_y = -\frac{k_z H_x}{\omega\epsilon_0\epsilon_1}, \qquad E_z = +\frac{k_y H_x}{\omega\epsilon_0\epsilon_3} \tag{10.19}$$

Po dosadení do rovnice (10.18) dostaneme disperzný vzťah

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{k_y^2}{\epsilon_3} + \frac{k_z^2}{\epsilon_1} \tag{10.20}$$

Plocha rovnakej frekvencie je elipsa v rovine (k_y, k_z), (rotačný elipsoid v priestore).

7. **Grupová rýchlosť**

$$\vec{v}_g = \mathrm{grad}_{\vec{k}}\, \omega = \frac{c^2}{\omega}\begin{pmatrix} 0 \\ k_y/\epsilon_3 \\ k_z/\epsilon_1 \end{pmatrix} \tag{10.21}$$

8. **Poyntingov vektor**

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_z H_x \\ -E_y H_x \end{pmatrix} = \frac{H_x^2}{\epsilon_0\omega}\begin{pmatrix} 0 \\ k_y/\epsilon_3 \\ k_z/\epsilon_1 \end{pmatrix} = \frac{H_x^2}{\epsilon_0 c^2}\vec{v}_g \tag{10.22}$$

je rovnobežný s grupovou rýchlosťou.

9. **Fázová rýchlosť**

$$\vec{v}_f = \frac{\omega}{k}\vec{s}, \qquad \vec{s} = \frac{\vec{k}}{k} \tag{10.23}$$

Fázová rýchlosť nie je rovnobežná s grupovou rýchlosťou. Definuje rýchlosť, akou sa mení fáza EM vlny, a jej smer je kolmý na vlnoplochy (plochy konštantnej fázy). V niektorých prípadoch môže byť aj $v_f > c$, pretože zmena fázy nesúvisí s prenosom energie. Sú prípady, kedy fázová a grupová rýchlosť majú opačný smer.

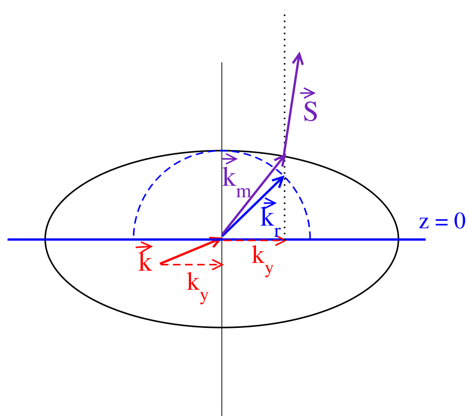
10. Energia EM vlny sa teda šíri v smere grupovej rýchlosti, nie v smere $\vec{k}$ (obr. 10.1).

11. Riadny a mimoriadny lúč sa teda šíria rôznymi smermi a rôznymi rýchlosťami. Zodpovedajú dvom polarizáciám EM vlny.

10.3 Lom svetla na rozhraní anizotrópneho materiálu

Preberieme len dva jednoduché prípady. V oboch sa elektromagnetická vlna šíri v rovine yz. V prvom prípade je rozhranie medzi izotrópnym a anizotrópnym materiálom rovnobežné s dvoma hlavnými osami tenzora permitivity. V druhom prípade uvažujeme len kolmý dopad na rozhranie a vysvetlíme dvojlom svetla. Všeobecný opis prechodu svetla do anizotrópneho prostredia nájdete napr. v [3].

1. **Rozhranie rovnobežné s hlavnými osami tenzora permitivity**
   Predpokladajme, že rozhranie medzi izotropným a anizotropným materiálom leží v rovine



Obr. 10.2. Riadny a mimoriadny lúč: na rozhranie $z = 0$ (vyznačené modrou horizontálnou čiarou) dopadá EM vlna s vlnovým vektorom $\vec{k}$. Uhol dopadu definuje zložku k_y, ktorá sa zachováva pre oba lúče. Riadny lúč má vlnový vektor k_r (modrý), pretože jeho disperzný vzťah je izotrópny (intenzita elektrického poľa smeruje v smere x). Preto sa v prostredí šíri v smere $\vec{k}_r$. Mimoriadny lúč má vlnový vektor $\vec{k}_m$, daný eliptickým disperzným vzťahom. Smer šírenia prechádzajúcej vlny je ale daný Poyntingovým vektorom. Parametre anizotropnej permitivity: $\epsilon_x = \epsilon_y = 2$, $\epsilon_z = 1$.

$z = 0$. Rozhranie je teda rovnobežné s dvoma hlavnými osami x a y. EM vlna sa šíri v rovine yz: $\vec{k} = (0, k_y, k_z)$. Uhol dopadu je θ_1 a

$$k_y = \frac{\omega}{c} \sin\theta_1 \tag{10.24}$$

je pozdĺžna zložka vlnového vektora, ktorá sa zachováva aj v anizotrópnom prostredí.

2. Riadny lúč $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$: šíri sa ako v izotrópnom prostredí, smer vektora $\vec{k}_r$ je totožný s Poyntingovým vektorom a je daný uhlom $\sin\theta_2$, ktorý dostaneme zo Snellovho zákona.

3. Mimoriadny lúč: (obr. 10.2). Intenzita elektrického poľa je $\vec{E} = (0, E_y, E_z)$. Vlnový vektor prechádzajúcej vlny $\vec{k}_m$ zviera s osou y uhol θ_2, pre ktorý platí

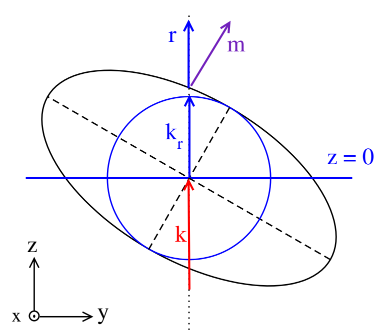
$$\tan\theta_2 = k_z/k_y \tag{10.25}$$

Hodnotu k_z je treba nájsť z disperzného vzťahu (10.20). Energia sa šíri v smere Poyntingovho vektora $\vec{S}$, ktorý zviera s osou y uhol

$$\tan\tilde{\theta}_2 = \frac{S_z}{S_y} = \frac{k_z}{k_y}\frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} \tag{10.26}$$

Na rozdiel od riadneho lúča, ktorého smer nezávisí od frekvencie, sa smer mimoriadneho lúča zmení, keď zmeníme frekvenciu.

4. **Všeobecnejší prípad**
rozhranie neleží v smere dvoch hlavných osí (obr. 10.3). Predpokladajme, že vonkajšia vlna dopadá kolmo na rozhranie. Potom $k_y = 0$ v oboch prostrediach. Oba vlnové vektory v anizotropnom prostredí sú teda kolmé na rozhranie. Smer šírenia lúčov je ale iný: riadny lúč sa šíri v smere kolmom, ako aj má byť, ale mimoriadny sa síri opäť v smere normály k elipse. Toto je podstatou dvojlomu (napr. na islandskom vápenci).



Obr. 10.3. Rozhranie $z = 0$ (modrá horizontálna čiara) nie je rovnobežné so žiadnou z hlavných osí (hlavné osi sú vyznačené prerušovanými čiarami). Svetlo dopadá kolmo na rozhranie ($k_y = 0$). Riadny lúč preto pokračuje v smere osi z, ako sme zvyknutí pri izotrópnych materiáloch. Mimoriadny lúč sa napriek tomu láme, pretože smer jeho šírenia je daný grupovou rýchlosťou v anizotrópnom materiáli (normálou k elipse vyznačenou vektorom m).

5. Všeobecný prípad predpokladá ľubovoľnú orientáciu hlavných osí voči rovine rozhrania. Opäť vznikajú dva polarizované lúče, analytické vzťahy vyjadrujúce smer šírenia sú ale zložitejšie [3].

10.4 Polarizátory

1. Polarizátor: filter, ktorý prepúšťa len EM vlnu jednej polarizácie. Pozri obr. 10.4.

2. Prechod EM vlny anizotropnou platničkou hrúbky ℓ.
   Anizotropný materiál má v dvoch kolmých smeroch permitivity $\epsilon_x \neq \epsilon_y$. Svetlo s vlnovou dĺžkou λ naň dopadá kolmo v smere osi z. Prechod EM vlny závisí od polarizácie:

   - Ak je polarizované s $\vec{E} \parallel x$, šíri sa v platničke s indexom lomu $n_x = \sqrt{\epsilon_x}$.
   - Ak je polarizované s $\vec{E} \parallel y$, šíri sa v platničke s indexom lomu $n_y = \sqrt{\epsilon_y}$.

   Ak je na vstupe do materiálu EM vlna lineárne polarizovaná v ľubovoľnom smere:

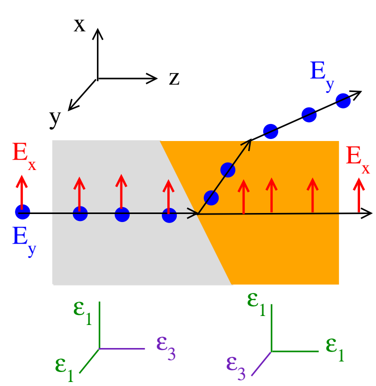
$$\vec{E} = (E_x, E_y, 0) \tag{10.27}$$

$$E_x = Ee^{i[k_z z - \omega t]}, \qquad E_y = Ee^{i[k_z z - \omega t]} \tag{10.28}$$

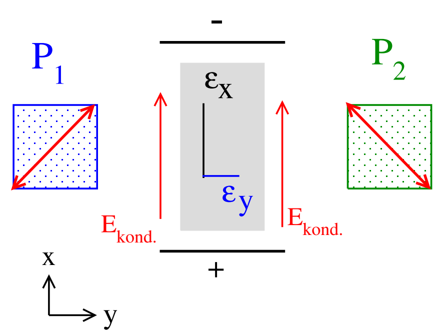
   bude na výstupe fázový rozdiel medzi E_x a E_y-ovou zložkou poľa

$$\Delta\phi = 2\pi(n_x - n_y)\frac{\ell}{\lambda}, \qquad \lambda = 2\pi/k_z \tag{10.29}$$

   Na výstupe je preto vlna elipticky polarizovaná. Fázový rozdiel medzi oboma zložkami narastá lineárne s hrúbkou platničky ℓ.



Obr. 10.4. Polarizátor je zložený z dvoch kusov anizotrópneho materiálu, ktoré sú navzájom otočené okolo osi x. Nepolarizovaná EM vlna prichádzajúca zľava v smere z, pokračuje v prvom materiáli; na rozhraní medzi dvoma materiálmi sa ale každá jej zložka láme inak: vlna E_x rozhranie "nevidí", pretože permitivita ϵ_x sa nemení. Vlna E_y prechádza rozhraním medzi dvoma materiálmi a láme sa. V materiáli 2 sa preto šíria dve lineárne polarizované vlny rôznymi smermi. Na výstupe dostaneme len vlnu E_x, druhá vlna, E_y je odchádza iným smerom, resp. môže byť odtienená.



Obr. 10.5. Kerrova bunka: EM vlna sa šíri v smere osi z. Najprv vstupuje do polarizátora P_1, ktorý prepustí len vlnu, polarizovanú pod uhlom $\pi/4$ voči x. Potom prejde materiálom s nelineárnou permitivitou vyvolanou vonkajším elektrickým poľom kondenzátora. Na záver prechádza polarizátorom P_2, ktorý prepúšťa vlny s polarizáciou kolmou voči polarizátoru P_1. Ak je kondenzátor vypnutý, cez sústavu neprejde nič, pretože materiál medzi polarizátormi je izotrópny. Ak kondenzátor nabijeme, materiál v elektrickom poli $\mathcal{E} = E_{\text{kond.}}$ sa stane anizotrópny a vstupujúca lineárne polarizovaná vlna bude na výstupe z materiálu elipticky polarizovaná. Polarizátor P_2 potom prepustí lineárne polarizovanú vlnu.

3. Nelineárne prostredia, **Kerrov jav**
   Niektoré materiály majú nelineárnu závislosť medzi $\vec{E}$ a $\vec{D}$. Permitivita môže by funkciou intenzity elektrického poľa. V prípade Kerrovho javu

   $$\epsilon_x = \epsilon_1 + \epsilon_n |\mathcal{E}|^2 \tag{10.30}$$

   (*de facto* ju majú všetky materiály, ale obyčajne je ϵ_n malý, a prejaví sa Len v mimoriadne silných poliach). Ak takú látku vložíme do statického elektrického poľa $\mathcal{E}$ (napr. do kondenzátora) v smere osi x, môžeme napätím na kondenzátore meniť permitivitu a vytvoriť tak umelo anizotropný materiál. Rozdiel indexov lomu

   $$n_x - n_y \propto |\mathcal{E}|^2 \tag{10.31}$$

   Ak do látky vstupuje lineárne polarizovaná vlna s elektrickou intenzitou $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$ na výstupe bude kruhovo alebo elipticky polarizovaná, ako bolo ukázané v prechádzajúcom odseku.

4. **Kerrova bunka**
   Je zobrazená na obr. 10.5. anizotropiu môžeme vypínať/zapínať vonkajším elektrickým poľom. Ak vložená medzi dva skrížené polarizátory, neprejde cez sústavu pri nulovom poli nič, pri zapnutom poli v kondenzátore ale na výstupe dostaneme signál. Zapínaním poľa teda vieme modulovať prechod svetla sústavou. Výhoda: veľmi krátka reakčná doba (10^{-9} s).

5. **Optická aktivita**. Cottonov jav
   Niektoré organické materiály majú iný index lomu pre dve orientácie kruhovo polarizovanej vlny (optická aktivita). Ak na taký materiál dopadá lineárne polarizovaná vlna, môžeme ju rozložiť na dve kruhovo polarizované vlny (obr. 1.4). Hoci prechádzajú tým

istým materiálom, každá "vidí" iný index lomu, preto na výstupe budú kruhovo polarizované vlny fázovo posunuté rozdiel fáz je opäť daný vzťahom (10.29). Ich súčet preto dá lineárne polarizovanú vlnu, ale s pootočeným uhlom polarizácie. Jav je zaujímavý v oblasti frekvencií, kde jeden z indexov lomu má rezonanciu a druhý nemá – vtedy je pootočenie uhla polarizácie veľké.

10.5 Prechod svetla polarizátorom

1. Prirodzené svetlo je zložené z lineárne polarizovaných vo všetkých smeroch. Intenzita

   $$I = \sum_\alpha I_\alpha \tag{10.32}$$

   kde $I_\alpha = \vec{E}_\alpha^* \cdot \vec{E}_\alpha$ je intenzita lineárne polarizovanej vlny a sumuje sa cez všetky možné orientácie vektora $\vec{E}_\alpha$.

   Ak sa svetlo šíri v smere osi z, má $\vec{E}$ zložky E_x a E_y a pretože ani jeden smer nie je zvýhodnený, platí

   $$I = I_x + I_y, \qquad I_x = I_y = \frac{1}{2} I \tag{10.33}$$

2. Miera polarizácie svetla je definovaná pomerom

   $$\Delta = \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} \tag{10.34}$$

   Nepolarizované svetlo má $\Delta = 0$.

3. Po prechode svetla cez lineárny polarizátor orientovaný napr. v smere osi x prejde len zložka poľa orientovaná pozdĺž x. prechod cez polarizátor preto redukuje intenzitu $I \to I_x = I/2$ a $\Delta \to 1$.

4. Odraz od rozhrania. Ak sa pôvodne nepolarizované svetlo odrazí od akéhokoľvek rozhrania, stane sa čiastočne polarizovaným $\Delta \neq 0$, pretože koeficienty odrazu pre dve polarizácie sa od seba líšia.

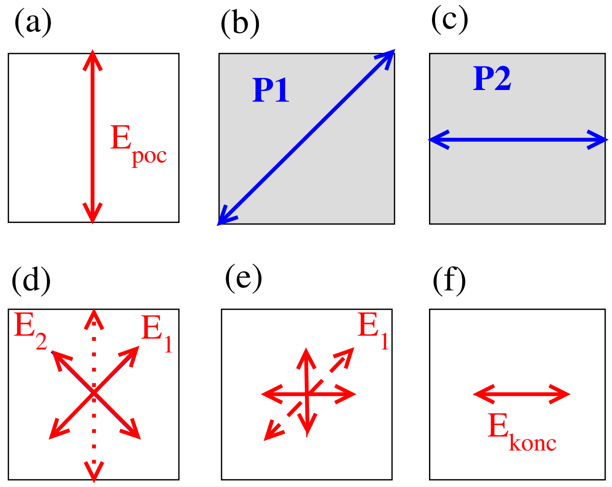
5. **Paradox**
   Dá sa z vlny polarizovanej v smere x získať vlna polarizovaná v smere y?

   Obrázok 10.6 ukazuje, že áno. V konfigurácii na obrázku (kedy os polarizátora P1 zviera s vertikálnou osou uhol $\pi/4$) prejde cez oba polarizátory horizontálne polarizovaná vlna s intenzitou

   $$E_{\rm konc} = \frac{1}{2} E_{\rm poc} \tag{10.35}$$

   teda polarizátory prepustia presne štvrtinu energie pôvodnej vlny:

   $$I_{\rm konc} = |E_{\rm konc}|^2 = \frac{1}{4} I_{\rm poc} \tag{10.36}$$



Obr. 10.6. Prechod lineárne polarizovanej vlny dvoma polarizátormi P1 a P2. (a) Vstupujúca elektromagnetická vlna má intenzitu $E_{\rm poc}$ a postupne prejde polarizátormi P1 a P2, znázornenými na obrázkoch (b) a (c). Obrázok (d) ukazuje, že vstupnú vlnu si môžeme predstaviť ako superpozíciu dvoch lineárne polarizovaných vĺn s amplitúdami $E_1 = E_2 = E_{\rm poc}/\sqrt{2}$ a kmitajúcimi vo fáze v smeroch zvierajúcich s vlnou $E_{\rm poc}$ uhol $\pi/4$. (e) Cez polarizátor P1 prejde len rovinná vlna E_1. Túto vlnu si opäť môžeme predstaviť ako superpozíciu dvoch lineárne polarizovaných vĺn vo vertikálnom a horizontálnom smere. (f) Cez polarizátor P2 prejde len vlna polarizovaná v horizontálnom smere. Jej amplitúda $E_{\rm konc} = E_1/\sqrt{2} = E_{\rm poc}/2$.

10.6 Umelá anizotropia, efektívna permitivita

Umelú anizotropiu môžeme vyvolať vonkajším magnetickým poľom, vonkajším tlakom, apod. Príkladom je Kerrova bunka z predchádzajúcej časti, v ktorej sa materiál stal anizotrópnym vplyvom silného elektrického poľa. Okrem toho je možné vyrobiť permanentné anizotrópne materiály. Najjednoduchší umelo vytvorený anizotrópny materiál je zobrazený na obrázku 10.7.

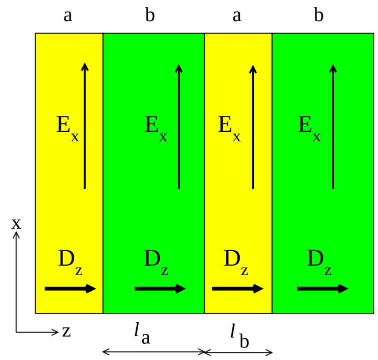
1. Príklad umelo vytvoreného anizotrópneho prostredia: materiál zložený z opakujúcich sa tenkých vrstiev s permitivitami ϵ_a a ϵ_b (obr. 10.7). Ak sú hrúbky vrstiev oveľa menšie ako vlnová dĺžka,

$$\lambda \gg \ell_a, \ell_b \tag{10.37}$$

vníma prechádzajúca elektromagnetická vlna materiál ako homogénny s nájdeme efektívnou permitivitou závislou od smeru:

2. **Efektívna permitivita v dvoch smeroch rovnobežných s rozhraniami medzi vrstvami** Zložka elektrickej intenzity E_x je rovnaká v oboch vrstvách. Predpokladáme, že elektrickú indukciu D_x môžeme vyjadriť ako priemernú hodnotu

$$D_x = \frac{\ell_a D_{ax} + \ell_b D_{bx}}{\ell_a + \ell_b} \tag{10.38}$$



Obr. 10.7. Umelo vytvorený materiál zložený striedaním vrstiev dvoch materiálov. Hrúbky vrstiev sú ℓ_a a ℓ_b. Ak cez takúto štruktúru prechádza EM vlna, ktorej vlnová dĺžka $\lambda \gg \ell_a, \ell_b$, dá sa materiál charakterizovať dvoma rôznymi permitivitami $\epsilon_{\|}$ a $\epsilon_{\perp}$ (rovnice 10.43 a 10.40) a prostredie je anizotrópne. Permitivity sa nájdu z podmienky spojitosti E_x a D_z na hraniciach medzi vrstvami (pozri text).

a po dosadení $D_{ax} = \epsilon_a E_x$ a $D_{bx} = \epsilon_b E_x$ dostaneme

$$D_x = \epsilon_{\|} E_x \tag{10.39}$$

s **efektívnou** permitivitou $\epsilon_{\|}$ vyjadrenou vzťahom

$$\epsilon_{\|} = \frac{\ell_a \epsilon_a + \ell_b \epsilon_b}{\ell_a + \ell_b} \tag{10.40}$$

3. **Permitivita v smere kolmom kolmom na vrstvy**
   Zložka elektrickej indukcie D_z je rovnaká v oboch vrstvách. Elektrickú intenzitu E_z vyjadríme ako priemernú hodnotu

   $$E_z = \frac{\ell_a E_{za} + \ell_b E_{zb}}{\ell_a + \ell_b} \tag{10.41}$$

   Po dosadení vzťahov $D_{za} = \epsilon_0 \epsilon_a E_{za}$ $D_{zb} = \epsilon_0 \epsilon_b E_{zb}$ dostaneme

   $$E_z = \epsilon_0 \epsilon_{\perp} D_z \tag{10.42}$$

   s efektívnou permitivitou

   $$\epsilon_{\perp} = \epsilon_a \epsilon_b \frac{\ell_a + \ell_b}{\ell_a \epsilon_b + \ell_b \epsilon_a} \tag{10.43}$$

4. **Efektívne parametre**
   Uvedený príklad je príkladom nehomogénnych materiálov – kompozitov – v ktorých môžeme definovať efektívnu permitivitu a permeabilitu, ak vlnová dĺžka spĺňa nerovnosti (10.37). Ak $\epsilon_a < \epsilon_b$, tak platí

   $$\epsilon_a < \epsilon_{\perp}, \epsilon_{\|} < \epsilon_b \tag{10.44}$$

Z dvoch rôznych materiálov je možné vytvoriť rôzne typy kompozitov a hľadať efektívnu permitivitu v jednotlivých smeroch v závislosti od geometrického usporiadania jednotlivých zložiek.

5. **Závislosť od vlnovej dĺžky**
   Všimnime si, že odozva materiálu na prechádzajúcu elektromagnetickú vlnu závisí od vlnovej dĺžky:

   - **Kompozit**
     Ak je splnená podmienka
     $$\lambda \gg \ell_a, \ell_b \tag{10.45}$$
     teda hrúbky vrstiev sú oveľa tenšie, ako vlnová dĺžka (pozri aj 10.37), potom materiál môžeme považovať za homogénny a anizotrópny, s permitivitami $\epsilon_{\|}$ a $\epsilon_{\perp}$, ktoré sme odvodili v predchádzajúcej časti.
   - **Fotonický kryštál**
     Ak platí
     $$\lambda \sim \ell_a, \ell_b \tag{10.46}$$
     nastáva interferencia prechádzajúcej vlny na jednotlivých rozhraniach. Materiál sa správa ako fotonický kryštál [6]. Takáto štruktúra nemôže byť charakterizovaná permitivitou. Prechod elektromagnetickej vlny závisí od vlnovej dĺžky – v niektorých intervaloch vlnových dĺžok je štruktúra nepriehľadná (totálne odráža dopadajúcu vlnu). Pre prechod elektromagnetickej vlny je dôležitá interferencia vĺn, odrazených na jednotlivých rozhraniach medzi materiálmi.
   - **Geometrická optika**
     V opačnej limite
     $$\lambda \ll \ell_a, \ell_b \tag{10.47}$$
     je vlnová dĺžka prechádzajúcej elektromagnetickej vlny taká malá, že prechod elektromagnetickej vlny môžeme opísať v rámci geometrickej optiky a na opis prechodu vlny cez jednotlivé rozhrania využijeme Snellov zákon.

Literatúra

[1] A. Tirpák: Elektromagnetizmus, vyd. IRIS (3. a 4. vydanie, 2011) ISBN 978-80-89238-46-0

[2] R. Feynman: Feynmanove prednášky z fyziky, rôzne vydania v slovenskom, českom, anglickom jazyku.

[3] Petr Malý: Optika. Nakl. Karolinum, Praha 2013,
ISBN 987-80-246-2246-0

[4] A. Štrba, V. Mesároš, D. Senderáková: Svetlo: Vlny – lúče – fotóny ENIGMA Publ. Nitra, (2011). ISBN 979-80-89132-83-6

[5] A. Štrba: Všeobecná fyzika 3: Optika. Alfa, SNTL 1979

[6] P. Markoš: Fotonické kryštály a metamateriály, EUF Košice 2013, ISBN 978-80-89656-04-2

[7] J. Cirák a kol.: Zbierka príkladov a úloh z fyziky. Skriptá,Nakladateľstvo STU Bratislava (2013). ISBN 978-80-227-3868-2

[8] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: Fyzika, Vysoké učení technické v Brně – nakladatelství VUTIUM 2013. Preklad z anglického originálu Fundamentals of Physics, 8th Edition, John Willey and Sons, 2008.

[9] B.E.A. Saleh, M.C. Teich: Fundamentals of Photonics, J. Willey and Sons, 2007 (aj v českom preklade)

[10] M. Born, E. Wolf: Principles of Optics, 7th Ed. (Cambridge 1999)

[11] J.D. Jackson: Classical Electrodynamics, John Willey and Sons 1999

[12] P. Markoš, C. M. Soukoulis: Wave Propagation, Princeton Univ. Press 2008

[13] P. Fiala, I. Richter: Fyzikální optika, skriptá FJFI ČVUT Praha, Vydavatelství ČVUT (2005)

[14] V. Mesároš, A. Štrba, D. Senderáková: Nelineárna optika, FMFI UK Bratislava 20016,
ISBN 978-80-8147-064-6

[15] A. Beiser: Úvod do modernej fyziky, Academia, Praha 1975

[16] P. Markoš: MOderná fyzika, STU 2012

[17] V. Balek: Prečo svietia hviezdy? Alfa, Bratislava 1986