Cvičenie 2

Rovnice z prednášky

Cyklotrónová frekvencia	$\Omega_C = \frac{qB}{m}$	$\Omega_C^{rel} = \frac{qB}{\gamma m_0} = \Omega_C \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$
Lamourov polomer	$r_C = \frac{v_\perp}{\Omega_C}$	$r_C^{rel} = \frac{\gamma \frac{v}{c} m_0 c}{qB}$
Lorentzova sila	$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$	$\gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} + q\left(\frac{\vec{v}}{c^2}\right)(\vec{v}.\vec{E}) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
Elektrický drift	$\vec{v_E} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$	$E_k^{rel} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2$

Pohyb po cykloide

$v_x(t) = v'_\perp \sin(\Omega_C t + \Theta_0) + \frac{E_y}{B}$ $\qquad$ $x(t) = -\frac{v'_\perp}{\Omega_C} \cos(\Omega_C t + \Theta_0) + \frac{E_y}{B} t + X_0$

$v_y(t) = v'_\perp \cos(\Omega_C t + \Theta_0) - \frac{E_x}{B}$ $\qquad$ $y(t) = \frac{v'_\perp}{\Omega_C} \sin(\Omega_C t + \Theta_0) - \frac{E_x}{B} t + Y_0$

Úloha 1

Odvoďte pohyb nabitej častice v homogénnom elektrickom a magnetickom poli (pohyb po cykloide) v kartézskom systéme. (Bittencourt, strana 53). Magnetické a elektrické polia máme v tvaroch:

$$\vec{B} = B\hat{\mathbf{z}}, \tag{1}$$

$$\vec{E} = E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}} + E_z\hat{\mathbf{z}}. \tag{2}$$

Pohybovú rovnicu máme v tvare:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m}\left[(E_x + v_y B)\hat{\mathbf{x}} + (E_y - v_x B)\hat{\mathbf{y}} + (E_z)\hat{\mathbf{z}}\right]. \tag{3}$$

Úloha 2

Bittencourt, úloha číslo 2.4, strana 57:

Cvičenie 2

Vo všeobecnosti je dráha nabitej častice v navzájom kolmých $\vec{E}$ a $\vec{B}$ cykloida. Ukážte, že v prípade $\vec{v} = v_0\hat{\mathbf{x}}$, $\vec{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$ a $\vec{E} = E_0\hat{\mathbf{y}}$ platí, že pre $v_0 = E_0/B_0$ je trajektória častice priamočiara.

Vysvetlite využitie tohto vzťahu v hmotnostnom spektrometri:

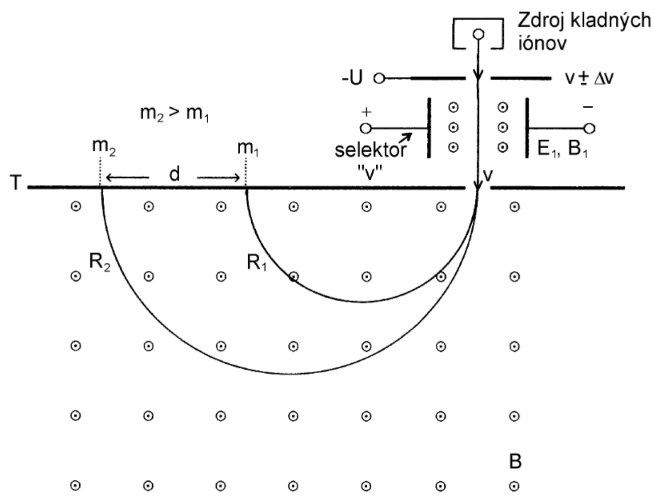

Figure 1: Schéma hmotnostného spektrometra.

Úloha 3

Bittencourt, úloha číslo 2.1, strana 56: Určte cyklotrónovú frekvenciu a Lamourov polomer pre:

- Elektrón v ionosfére Zeme, vo výške 300 km, $B = 0.5 \times 10^{-4}$ T a $T = 1000$ K.
- Protón vo vnútornom van Allenovom páse s energiou 50 MeV, vo vzdialenosti $1.5R_z$ ($R_z = 6370$ km), $B = 10^{-5}$ T.
- Elektrón vo vonkajšom van Allenovom páse s energiou 1 MeV, vo vzdialenosti $4R_z$, $B = 10^{-7}$ T.
- Protón slnečného vetra rýchlosti $v = 100$ km/s, $B = 10^{-9}$ T.
- Protón v slnečnej škvrne s energiou 1 MeV, $B = 0.1$ T.

Cvičenie 2

Úloha 4

Magnetické pole Zeme sa dá modelovať ako magnetické pole prúdovej slučky (slučka, v ktorej tečie elektrický prúd). Malá prúdová slučka sa často nazýva **magnetický dipól**. V našom prípade uvažujeme jadro Zeme ako kruhovú prúdovú slučku, ktorá generuje dipólové magnetické pole.

Silové polia sa určujú z potenciálu. Pre elektrické pole generované nabitými časticami platí:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{4}$$

Dôsledkom tohto vzťahu môžeme napísať:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \tag{5}$$

kde ϕ je elektrický skalárny potenciál. Pre magnetické pole však vyššie uvedené vzťahy nemôžeme použiť. Spôsobené je to tým, že magnetické pole je vždy generované v okolí nabitých častíc - neexistujú častice s "vlastným" magnetickým poľom. Odborne sa tomuto faktu hovorí, že neexistujú magnetické monopóly (častice s "vlastným" magnetickým poľom) a tento fakt sa dá opísať vzťahom:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \tag{6}$$

V dôsledku toho nemôžeme definovať magnetický skalárny potenciál, ktorého záporný gradient generuje magnetické silové pole. Môžeme však zadefinovať tzv. magnetický vektorový potenciál, pre ktorý platí:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{7}$$

Magnetický vektorový potenciál $\vec{A}$ udáva v podstate potenciál vo vzdialenosti $\vec{r}$ od zdroja elektrického prúdu (ktorý generuje magnetické pole).

Ciele úlohy:

- Určte magnetického pole Zeme ako magnetické pole dipólu generovaného zemským jadrom. Postup: určte magnetický vektorový potenciál prúdovej slučky. Magnetické pole určte zo vzťahu $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.
- Určte pohybovú rovnicu nabitej častice v takomto poli. Pre zjednodušenie zanedbajte elektrické pole.

Vektorové identity a pomocné vzorce

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{C} \cdot \vec{A}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \tag{8}$$

Cvičenie 2

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \tag{9}$$

$$\vec{\nabla}(\phi \vec{A}) = \vec{\nabla}(\phi) \cdot \vec{A} + \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \tag{10}$$

Taylorov rozvoj:

$$f(\vec{r} - \vec{r'}) = f(\vec{r}) - \left[x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z}\right] f(\vec{r}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2 f(\vec{r})}{\partial x'_i \partial x'_j} + ... \tag{11}$$

Cvičenie 2

Prílohy

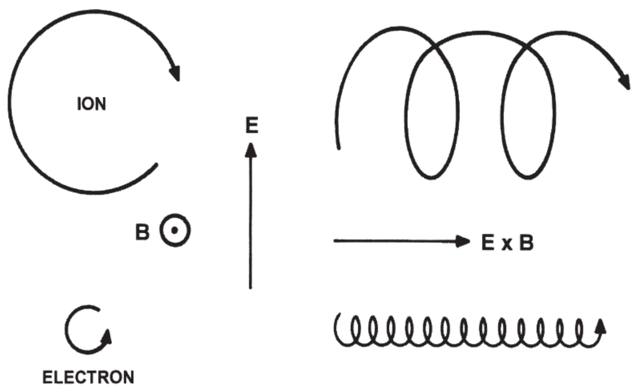

Figure 2: Pohyb elektrónov a iónov po cykloide v navzájom kolmých elektrických a magnetických poliach. $\vec{E} \times \vec{B}$ spôsobuje drift v smere vektorového súčinu.

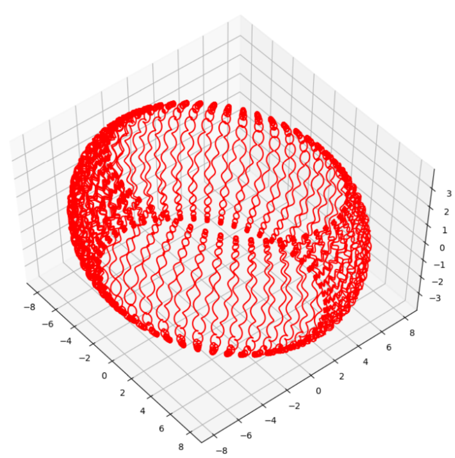

Figure 3: Pohyb α častice v magnetickom poli Zeme - jej trajektória vytvára radiačný pás.

Cvičenie 2

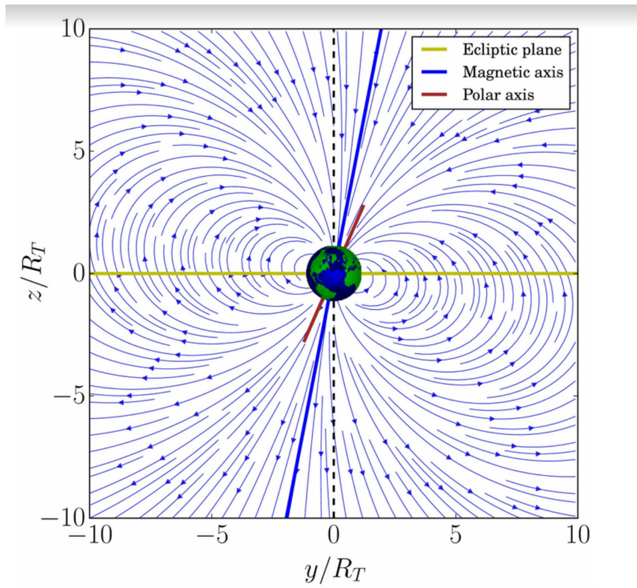

Figure 4: Magnetické pole Zeme v dipólovej aproximácii.

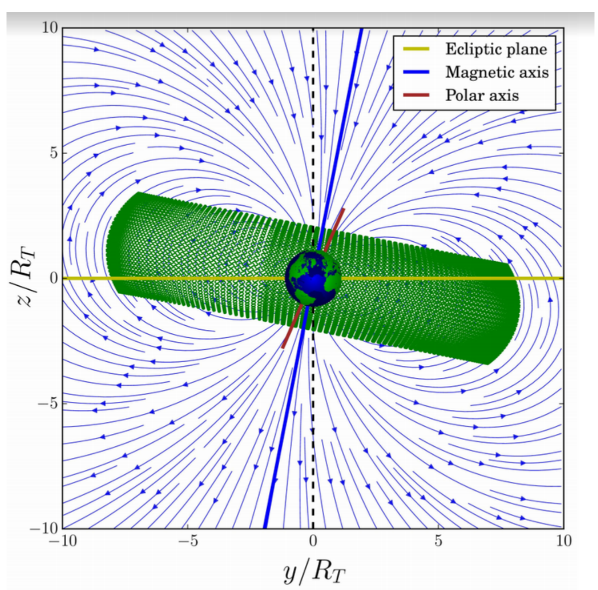

Figure 5: Pohyb α častice v magnetickom poli Zeme - jej trajektória vytvára radiačný pás.