

Priebeh

V prvej polovici letného semestra bolo cieľom projektu využiť kód na hľadanie chromatického čísla grafu z minulého semestra na získanie dát, ktoré by mohli niečo priblížiť o chromatickom čísle pre bezškálové grafy generovaných podľa Barabási-Albert modelu a prípadne povedať niečo o presnosti greedy algoritmy na farbenie.

Najprv som vybral vhodné metriky na posudzovanie chromatického čísla. Tie boli zistenie chromatického čísla pre 100 grafov vygenerovaných podľa Barabási-Albert modelu a počet farieb potrebných na ofarbenie grafu greedy algoritmom a zo zistených čísel získať minimum, medián a maximum pre oba algoritmy (chromatické číslo SAT solverom a použitie greedy algoritmu).

Minimálne chromatické číslo avšak nie je až taká zaujímavá štatistika, lebo to je pre každý graf s n vrcholmi najviac 2, nezávisle od m , napríklad ak by sa každý nový vrchol pripojil všetkými m hranami len ku predošlému vrcholu. Tento prípad však vzhľadom na to, že generovanie grafov podľa Barabási-Albert modelu nie je deterministické v podstate nikdy nenastane a ani jemu podobné extrémny, teda minimum chromatického čísla bude trochu skreslené.

Po napísaní kódu v C++, ktorý je, z využitím už hotového kódu zo zimného semestra, schopný tieto testy vykonať a zozbierať z nich uvedené štatistiky som ešte vytvoril program v Python-e, ktorý mi pre dáta v podobe zoznamu tvoreného zložkami $\{n, \text{min}, \text{med}, \text{max}, \text{minGreedy}, \text{medGreedy}, \text{maxGreedy}\}$ usporiadané podľa n vytvorí čiarové grafy.

Zozbieral som niekoľko sád dát, každá sada bola pre dané m a $m + 2 \leq n \leq 100$. Za m boli postupne boli v jednotlivých sádach zvolené hodnoty 2, 3, 4 a 5 nakoľko pre väčšie hodnoty m už čas potrebný na dokončenie testov začínal byť v niekoľkých hodinách. Výsledné grafy sú viditeľné nižšie:

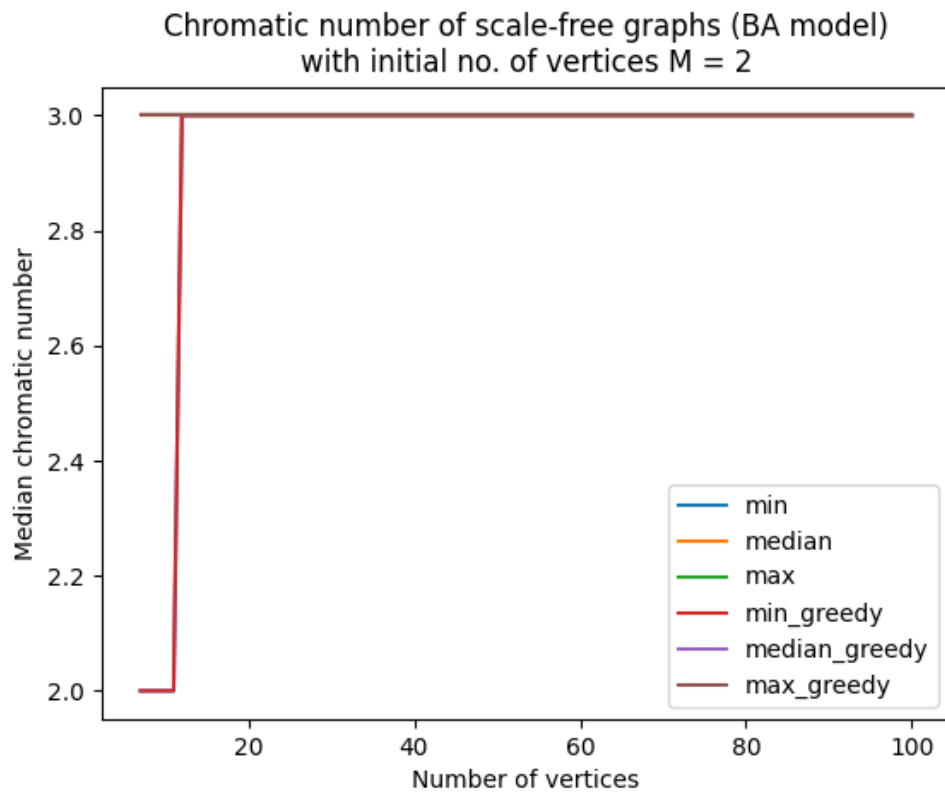


Figure 1: Graf pre $m = 2$

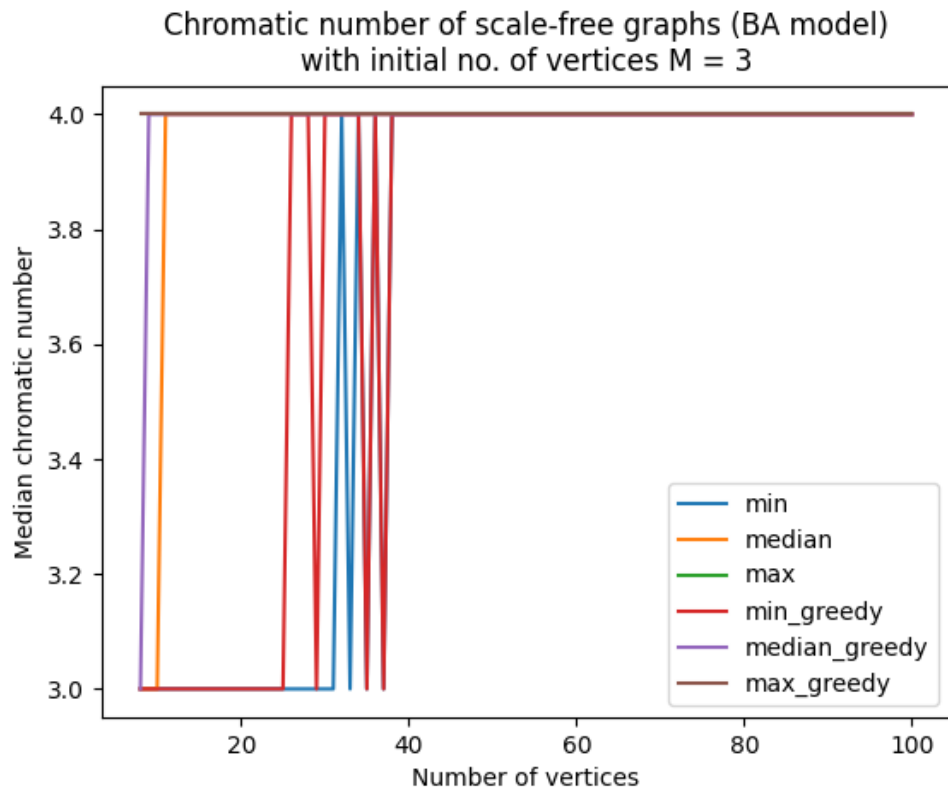


Figure 2: Graf pre $m = 3$

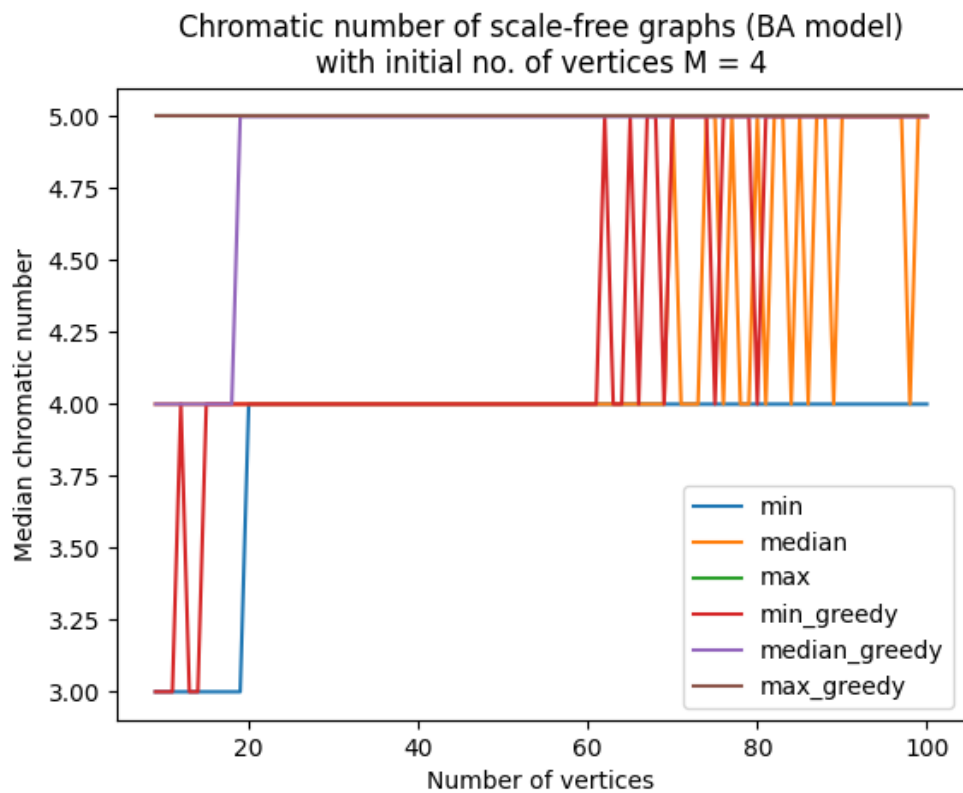


Figure 3: Graf pre $m = 4$

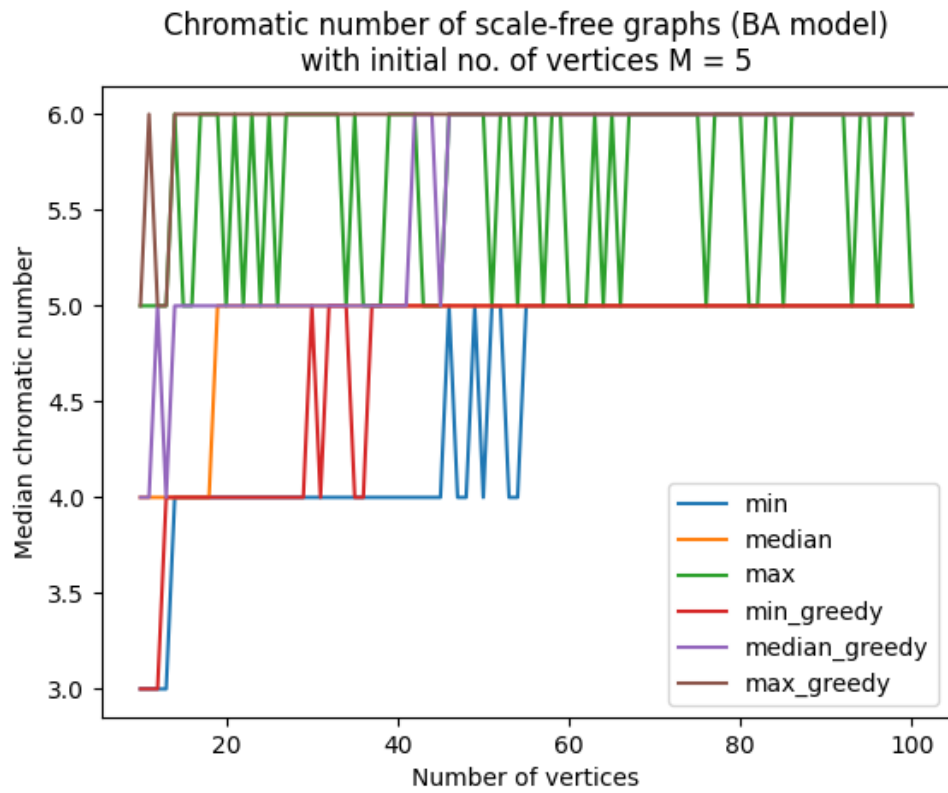


Figure 4: Graf pre $m = 5$

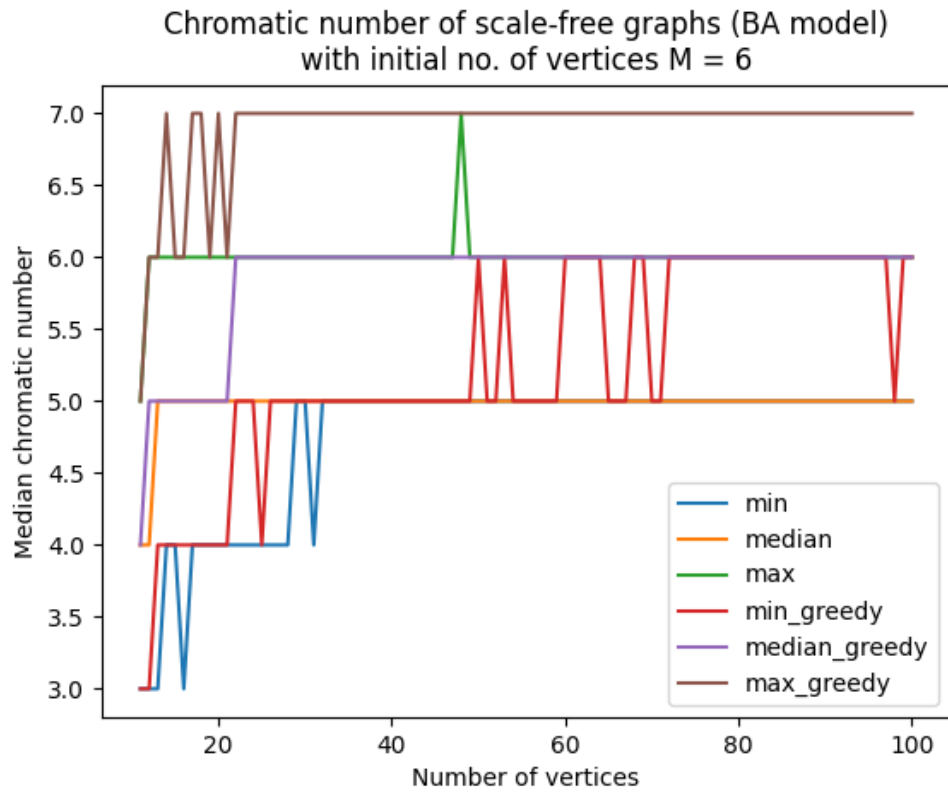


Figure 5: Graf pre $m = 6$

Z jednotlivých grafov je zrejmý trend, ktorý ukazuje, že maximum a eventuelne aj medián chromatického čísla smerejú $m + 1$. Nakoľko greedy algoritmus zafarbí graf na najviac $m + 1$ farieb, pretože pridelí farbu s najmenším voľným (žiaden z jeho susedov farbu s tým číslom nemá) číslom, tak nikdy nezafarbí graf na viac ako $m + 1$ farieb. Spoločne s poznatkom, že nielen maximum, ale aj medián sa eventuelne približujú k $m + 1$ môžeme teoretizovať, že pre väčšinu grafov, ktoré budú vygenerované Barabási-Albert modelom, nájde greedy algoritmus takmer optimálne farbenie grafu vzhľadom na počet farieb.

Bohužiaľ, pri výskume tejto témy pred začatím projektu sme nenarazili na žiadne práce, ktoré by podporovali túto alebo jej podobnú teóriu, avšak pri ďalšom hľadaní po zistení týchto výsledkov, sme našli článok [1], ktorý ukázal, že takmer pre všetky takéto grafy sa pre dané m chromatické číslo naozaj blíži k $m + 1$ s rastúcim n .

Záver semestra preto bol venovaný plánu B, ktorý som výskúšať vytvoriť doménovo špecifický SAT solver, ktorý by mohol potenciálne lepšie (rýchlejšie) riešiť SAT inštancie farbenie takýchto grafov. Po štúdiu SAT solverov a technikách, ktoré sa v nich používajú, som našiel článok [2], ktorý je o high-level implementácii SAT solveru využívajúci Conflict Driven Clause Learning (CDCL). Zvyšný čas semestra som strávil implementovaním SAT solveru podľa tohoto článku a všetky potrebné som aj implementoval, avšak vzhľadom na nedostatok času sa mi celý SAT solve už nepodarilo odladiť, aby fungoval, nakoľko som niekto urobil nejaké buggy, ktoré som už všetky nestihol odladiť.

References

- [1] Lichev, L. (2021). On the chromatic number of the preferential attachment graph. European Journal of Combinatorics, 96, 103365. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2021.103365>
- [2] Eén, N., Sörensson, N. (2004). An Extensible SAT-solver. Lecture Notes in Computer Science, 502–518. https://doi.org/10.1007/978-3-540-24605-3_37