Matúš Duchyňa
16. júna 2025

Report z letného semestra

V letnom semestri som zisťoval, či má graf G acyklické vrcholové regulárne farbenie s k farbami, (či platí $a(G) \leq k$) pomocov SAT solveru.

Najťažsia vec je zakódovať problém do CNF formúl. Rozdelíme si ho preto na nikoľko častí a každú vyriešime samostane:

Poznámka: Symbol $[n]$ v tomto texte označuje množinu všetkých čísel od 1 po n, teda $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. *Literály:*
   Ako prvé očíslujeme vrcholy grafu G číslami $1, 2, \ldots, n$ a farby $1, 2, \ldots, k$. Literál $c_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{N}, i \leq n, j \leq k$ bude pravdivý vtedy, ak vrchol i má farbu j.

2. *Každý vrchol má aspoň jednu farbu:*
   Pre každý vrchol i musíme pridať klauzulu, ktorá zabezpečí, že aspoň jeden literál $c_{i,j}$ bude pravdivý:

$$\bigvee_{j=1}^{k} c_{i,j} \qquad i \in [n]$$

3. *Každý vrchol má najviac jednu farbu:*
   Pre každý vrchol i musíme pridať klauzulu, ktorá zabezpečí, že najviac jeden literál $c_{i,j}$ bude pravdivý. To znamená, že $\forall i \in [n]$ a pre všetky $j_1, j_2 \in [k]$ s $j_1 < j_2$ musí platiť $\neg(c_{i,j_1} \wedge c_{i,j_2})$. Po prevedení do CNF formy dostaneme:

$$\neg c_{i,j_1} \vee \neg c_{i,j_2} \qquad i \in [n],\, j_1, j_2 \in [k],\, j_1 < j_2$$

4. *Regulárnosť farbenia:*
   Pre každú dvojicu incidentných vrcholov i_1, i_2 musíme pridať klauzulu, ktorá zabezpečí, že aspoň jeden z vrcholov i_1 a i_2 nemá farbu j pre každú farbu j. To znamená, že $\forall i_1, i_2 \in [n]$ také, že $(i_1, i_2) \in E(G)$ a $\forall j \in [k]$ platí $\neg(c_{i_1,j} \wedge c_{i_2,j})$. V CNF forme to bude:

$$\neg c_{i_1,j} \vee \neg c_{i_2,j} \qquad (i_1, i_2) \in E(G),\, j \in [k]$$

5. *Acyklickosť:*
   Zostrojíme množinu $C = \{c \in 2^{[n]} \mid c \text{ je množina vrcholov ktoré tvoria cyklus v grafe } G\}$. Potom pre každý cyklus $c \in C$ musíme pridať klauzulu, ktorá zabezpečí, že aspoň jeden vrchol z c nemá farbu j_1, j_2 pre každú dvojicu farieb $j_1, j_2 \in [k]$. To znamená, že $\forall c \in C$, $\forall i \in c$ a pre všetky $j_1, j_2 \in [k]$ s $j_1 < j_2$ platí $\neg c_{i,j_1} \wedge \neg c_{i,j_2}$. Z praktického hľadiska zavedieme nový literál d_{i,j_1,j_2}, pre ktorý bude platiť $d_{i,j_1,j_2} \Leftrightarrow (\neg c_{i,j_1} \wedge \neg c_{i,j_2})$. Prevedením do CNF formy dostaneme:

$$\bigvee_{i \in c} d_{i,j_1,j_2} \qquad c \in C, j_1, j_2 \in [k], j_1 < j_2$$

   (a) *Platnosť $d_{i,j_1,j_2} \Leftrightarrow (\neg c_{i,j_1} \wedge \neg c_{i,j_2})$:*
   Upravíme $d_{i,j_1,j_2} \Leftrightarrow (\neg c_{i,j_1} \wedge \neg c_{i,j_2})$ do CNF formy.

$$d_{i,j_1,j_2} \Leftrightarrow (\neg c_{i,j_1} \wedge \neg c_{i,j_2})$$
$$(d_{i,j_1,j_2} \Rightarrow (\neg c_{i,j_1} \wedge \neg c_{i,j_2})) \wedge ((\neg c_{i,j_1} \wedge \neg c_{i,j_2}) \Rightarrow d_{i,j_1,j_2})$$
$$(\neg d_{i,j_1,j_2} \vee (\neg c_{i,j_1} \wedge \neg c_{i,j_2})) \wedge (\neg (\neg c_{i,j_1} \wedge \neg c_{i,j_2}) \vee d_{i,j_1,j_2})$$
$$(\neg d_{i,j_1,j_2} \vee \neg c_{i,j_1}) \wedge (\neg d_{i,j_1,j_2} \vee \neg c_{i,j_2}) \wedge (c_{i,j_1} \vee c_{i,j_2} \vee d_{i,j_1,j_2})$$

To sú všetky klauzuly, ktoré potrebujeme pridať do CNF formy. Teraz už len stačí vytvoriť SAT solver, ktorý bude vedieť spracovať tieto klauzuly a zistiť, či existuje acyklické vrcholové regulárne farbenie s k farbami.

Počet literálov "typu c", ktoré potrebujeme pre n vrcholov a k farieb je $n \cdot k$. Predpokladajme, že každý vrchol je v cykle. Potom budeme ešte potrebovať $n\frac{k(k-1)}{2}$ literálov "typu d". *Celkový počet literálov je teda* $n \cdot k + n\frac{k(k-1)}{2} = n \cdot \frac{k(k+1)}{2}$.

Počet klauzúl jednotlivých typov P a ich celková dĺžka D sú nasledovné:

2. Každý vrchol má aspoň jednu farbu:
   $P_2 = n$, $D_2 = n \cdot k$

3. Každý vrchol má najviac jednu farbu:
   $P_3 = n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$, $D_3 = n \cdot k(k-1)$

4. Regulárnosť farbenia:
   $P_4 = |E(G)| \cdot k$, $D_4 = 2|E(G)| \cdot k$

5. Acyklickosť:
   $P_5 = |C| \cdot \frac{k(k-1)}{2}$, $D_5 = |C| \cdot \frac{k(k-1)}{2} \cdot \sum_{c \in C} |c|$

   (a) Platnosť $d_{i,j_1,j_2} \Leftrightarrow (\neg c_{i,j_1} \wedge \neg c_{i,j_2})$:
   $P_{5.a} = 3n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$, $D_{5.a} = 21n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$

Čo sa týka efektívnosti, tak pri použití `CMSatSolver` je kód približne o 20% rýchlejší oproti brute-force metóde. Pri väčších grafoch s viac cyklami začína byť problém s pamäťou.