

Optimalizácia algoritmu pre testovanie kritickosti snarkov

Ján Gottweis*

Jozef Rajník†‡

Katedra informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Abstrakt: Snark je 3-regulárny graf, ktorý nie je hranovo 3-farbený. Snark je kritický, ak po odstránení ľubovoľnej dvojice susedných vrcholov sa stane hranovo 3-zafarbiteľným. Doterajšie algoritmy testujú kritickosť priamočiario – postupne odstraňujú každú dvojicu susedných vrcholov a testujú zafarbiteľnosť výsledného grafu.

V tejto práci predstavujeme efektívnejší algoritmus, ktorý v mnohých prípadoch redukuje počet potrebných testov zafarbiteľnosti. Naš prístup využíva informácie z jedného testu zafarbiteľnosti na výpočet zafarbiteľnosti pre mierne odlišný vstupný graf, čím redukuje redundantné výpočty.

Kľúčovým prvkom je transformácia farbenia pomocou vhodne zvolených cyklov, čo umožňuje efektívne odhadnúť kritické dvojice vrcholov bez nutnosti explicitného testovania všetkých dvojíc. Navrhovaný algoritmus tak výrazne zrýchľuje testovanie kritickosti snarkov, nakoľko pre väčšinu testovaných kritických snarkov znížil počet volaní testu zafarbiteľnosti na 1. Taktiež otvára zaujímavé teoretické otázky, ktoré môžu prispieť k výskumu kritických snarkov.

Kľúčové slová: kubické grafy, hranové farbenie, kritické snarky

Úvod

V teórii grafov sa ukázal veľký význam kubických¹ grafov, pretože veľké množstvo otvorených problémov minulého storočia pre všeobecné grafy, je redukovateľných na kubické grafy. Ak sa pozrieme napríklad na Tutteho hypotézu o nikde-nulovom 5-toku [Tutte, 1954], či už Szekeresovu [Szekeres, 1973] a Seymourovu [Seymour, 1979] hypotézu o dvojitom pokrytí cyklami, ukáže sa, že ak overíme ich platnosť pre kubické grafy, vyplynie z toho aj ich platnosť pre všeobecné grafy. Keďže však tieto hypotézy triviálne platia pre kubické hranovo 3-zafarbiteľné grafy, ukazuje sa veľmi dôležitý výskum kubických

grafov, ktoré nie sú hranovo 3-zafarbiteľné. Takéto grafy nazývame *snarky*.

My sa špeciálne budeme venovať *kritickým* snarkom, teda snarkom, ktoré sa po odstránení ľubovoľnej dvojice susedných vrcholov stanú zafarbiteľnými. Kritické snarky sú teda istým zmyslom hraničným prípadom medzi 3-zafarbiteľnými kubickými grafmi a snarkami a taktiež základom pre konštrukciu zvyšných snarkov. [Mazák et al., 2022]

Doterajší prístup k overovaniu kritickosti snarkov pozostával z postupného odstraňovania každej dvojice susedných vrcholov a hľadanie farbenia pre zvyšok grafu. Tento prístup, aj keď postačujúci pre menšie snarky, je veľmi neefektívny, pretože veľa krát hľadá farbenie na skoro tom istom vstupnom grafe.

V tomto článku sa zaoberáme prístupmi, ktoré umožnia čo najviac využívať informácie o farbení, ktoré sme pre graf bez nejakej dvojice vrcholov získali, na hľadanie farbenia pre graf, ktorý získame odstránením nejakej inej dvojice vrcholov bez toho, aby sme museli odznova hľadať farbenie aj pre momentálne nezmenenú časť grafu.

1 Základné pojmy a prvé prístupy

Už poznáme čo sú kritické snarky, avšak nám sa pri práci s touto problematikou oplatí zadefinovať si aj pojem kritickej hrany. Hranu budeme označovať za *kritickú*, ak po odstránení vrcholov s ňou incidentných sa graf stane 3-zafarbiteľným.

Cieľom našej práce je pre vstupný graf nájsť ľubovoľnú nekritickú hranu, alebo o všetkých hranách určiť, že sú kritické, volaním čo najmenšieho počtu testov zafarbiteľnosti, teda algoritmov na hľadanie farbenia.

1.1 Naivný priamočiary prístup

Všetky prístupy, ktoré spomenieme sa budú odrážať od nasledovného, ktorý postupne pre každú hranu overí či je kritická novým behom algoritmu pre hľadanie farbenia.

*gottweis2@uniba.sk

†jozef.rajnik@fmph.uniba.sk

‡Školiteľ

¹3-regulárnych

Algoritmus 1 Naivný priamočiary algoritmus

```
1: function SOLVE( $u, v$ )    ▷ túto funkciu budeme
   upravovať v ďalších optimalizáciach
2:   solved( $u, v$ ) = True
3: end function
4: function CHECKCRITICAL( $G$ )
5:   for  $edge(u, v) \in G$  do
6:     if solved( $u, v$ ) then
7:       continue;
8:     end if
9:      $c$  = colouring of  $G - \{u, v\}$ 
10:    if  $\neg$ exists  $c$  then
11:      return not critical
12:    end if
13:    SOLVE( $u, v$ )
14:  end for
15:  return critical
16: end function
```

1.2 Päťuholníková veta

Prvá drobná optimalizácia, ktorá veľmi zvýši efektivitu prístupu pre grafy s obvodom 5 je už dokázaná Kászonyiho veta o päťuholníkoch a kritických grafoch.

Veta 1. *Nech G je snark a k kružnica dĺžky 5. Potom ak jedna hrana tejto kružnice je kritická, sú všetky hrany kružnice kritické. [Kászonyi, 1973]*

Ak teda počas vykonávania naivného prístupu nájdeme nejakú kritickú hrana, môžeme postupne prehľadať všetky päťuholníky, ktoré ju obsahujú a prehlásiť aj zvyšné hrany na nich za kritické. Túto myšlienku potom vieme rekurzívne aplikovať aj na novonájdené kritické hrany.

Implementujeme túto myšlienku upravením funkcie solve z Algoritmu 1.

2 Farbenie ako cirkulácia

Ďalšie prístupy, ktorým sa budeme venovať v tejto práci sú založené na nasledovnej myšlienke.

Hranové 3-farbenia grafu môžeme interpretovať ako nikde-nulovú² cirkuláciu v $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. V tomto poli môžeme zabudnúť na orientáciu hrán. Cirkulácia potom bude ohodnotenie hrán také, že pre každý vrchol platí, že súčet na hranách s ním incidentných je

²cirkulácia bez nulových hrán

Algoritmus 2 Päťuholníková optimalizácia

```
1: function SOLVE( $u, v$ )
2:   if solved( $u, v$ ) then
3:     return;
4:   end if
5:   solved( $u, v$ ) = True
6:   for  $cycle$  in cycles of length 5 containing  $u, v$ 
       do
7:     for  $edge(x, y) \in cycle$  do
8:       SOLVE( $x, y$ )
9:     end for
10:  end for
11: end function
```

rovný 0. Ak farby reprezentujeme binárnymi hodnotami, je ľahké vidieť, že vrchol kubického grafu, ktorého incidentné hrany majú len hodnoty z 1, 2 alebo 3, má súčet týchto hodnôt rovný nule práve vtedy, keď obsahuje každú z nich raz. Ide teda o hranové farbenie. Problém testovania 3-zafarbitelnosti je teda ekvivalentný problému hľadania nikde-nulovej cirkulácie v grafe.

Pre potreby tejto práce budeme pracovať aj s grafmi, ktoré môžu mať hrany s len jedným koncovým vrcholom. Takéto hrany sú dôležité kvôli cirkuláciám, pretože odstránenie vrcholu, ktoré by viedlo aj k odstráneniu jeho susedných hrán, by znamenalo porušenie cirkulácie, pokiaľ by hrany nemali hodnotu 0. My však dovoľíme, aby po odstránení zostali hrany aj s jedným koncovým vrcholom, čo cirkuláciu nepokazí. Môžeme si všimnúť, že cirkulácia v takomto grafe sa bude dať rovnakým spôsobom previesť na hranové farbenie.

2.1 Pridanie nulových hrán

Tento prístup nám umožňuje pracovať s grafmi obsahujúcimi aj hrany farby 0. Ukážeme, že hrana je kritická práve vtedy, ak existuje v grafe cirkulácia, ktorá má hodnotu 0 práve na tejto hrane. Tieto myšlienky sa objavujú aj v iných článkoch, napr.: [Mačajová and Škoviera, 2021]. Preformulujeme ich však pre naše potreby.

Lema 1. *Nech c je cirkulácia v snarku G a nech hrana e má ako jediná hodnotu 0, potom hrana e je kritická.*

Dôkaz. Označme vrcholy s ktorými je hrana e incidentná u, v . Po odstránení vrcholov u, v z grafu zostáva graf, ktorý má nikde-nulovú cirkuláciu bez

nulových hrán³, teda je to 3-zafarbiteľný kubický graf. $\square$

Lema 2. *Nech G je snark a hrana e grafu G je kritická, potom existuje cirkulácia c , ktorá má hodnotu 0 práve na hrane e .*

Dôkaz. Označme vrcholy s ktorými je hrana e incidentná u, v . Z kritickosti hrany e vieme, že existuje 3-farbenie grafu $G - \{u, v\}$ ⁴, teda aj cirkulácia bez nulových hodnôt, označme ju c' . Skonstruujeme cirkuláciu c pre graf G . Pre všetky hrany f z G rôzne od e bude $c(f) = c'(f)$. Označme hrany rôzne od e , s ktorými sú vrcholy u, v incidentné postupne u_1, u_2 a v_1, v_2 . Hrany u_1, u_2, v_1, v_2 tvoria rez grafu G preto ak existuje cirkulácia c , súčet ich hodnôt v nej musí byť 0. [Blanuša, 1946] [Descartes, 1948]

Ukážeme, že $c(u_1) = c(u_2)$. Sporom. Predpokladajme, že $c(u_1) \neq c(u_2)$. Keďže však súčet $c(u_1) \oplus c(u_2) \oplus c(v_1) \oplus c(v_2) = 0$, musí platiť $\{c(u_1), c(u_2)\} = \{c(v_1), c(v_2)\}$. Potom existuje hodnota $x = c(u_1) \oplus c(u_2)$, ktorá nie je 0. Ak teraz ohodnotíme hranu e hodnotou x , dostávame cirkuláciu v G bez použitia nulovej hrany, čo vieme interpretovať ako hranové 3-farbenie v G . Spor.

Vieme teda, že $c(u_1) = c(u_2)$, teda aj $c(v_1) = c(v_2)$ a vieme aj vytvoriť cirkuláciu c , ktorá musí mať $c(e) = 0$. $\square$

Veta 2. *Hrana e snarku G je kritická práve vtedy, keď existuje cirkulácia s hodnotou 0 práve na hrane e .*

Dôkaz. Lema 1 a Lema 2 dokazujú obe implikácie. $\square$

2.2 Kempeho cykly

Definícia 1. *Nech c je hranové farbenie v grafe G , a, b sú dve rôzne farby a e je hrana tohoto grafu taká, že $c(e)=a$. Potom Kempeho reťaz je maximálny súvislý podgraf obsahujúci hranu e , a ktorého hrany sú farieb a alebo b .*

Kempeho cykly budeme používať len v grafoch, ktoré obsahujú všetky hrany s oboma koncovými vrcholmi. Potom si môžeme všimnúť, že v kubických 3-zafarbených grafoch je Kempeho reťaz cyklus. Na zvýraznenie tejto skutočnosti budeme hovoriť o *Kempeho cykloch*. My však nemáme 3-zafarbené

³hrany incidentné s u, v iné ako e v grafe zostávajú len s jedným koncovým vrcholom

⁴hrany incidentné s u, v iné ako e opäť v grafe zostávajú len s jedným koncovým vrcholom

grafy, pretože v našej cirkulácii môžeme mať aj jednu hranu s hodnotou 0. Pozrime sa však na to, ako sa budú správať Kempeho reťaze obsahujúce jeden z vrcholov incidentných s nulovou hranou.

Najskôr si však všimnime, že pokiaľ máme cirkuláciu s práve jednou nulovou hranou $e = (u, v)$, musí platiť, že súčet hodnôt na hranách incidentných s u ⁵ je rovný 0. Je teda zjavné, že hrany incidentné s u rôzne od e budú mať pridelenú rovnakú hodnotu.

Teraz sa môžeme naozaj pozrieť, ako sa budú správať naše Kempeho reťaze.

Lema 3. *Nech G je snark a c cirkulácia s hodnotou 0 práve na hrane $e=(u, v)$. Označme farbu hrán iných od e , s ktorými je u incidentný a . Nech b je farba rôzna od a . Potom Kempeho reťaz farieb a, b obsahujúca vrchol u , bude cyklus.*

Dôkaz. Nech reťaz skončila v nejakom vrchole $w \neq u$. Máme 2 možnosti.

(1) $w \neq v$

(2) $w = v$

(1) Sporom. Do w sme vošli hranou jednej z farieb a, b , a keďže aj vo vrchole w platí, že súčet hodnôt hrán incidentných s ním je 0, musí byť incidentný aj s hranou druhej z týchto farieb, teda ešte môžeme reťaz pokračovať. Spor.

(2) Sporom. Pozrime sa na cyklus tvorený touto reťazou a hranou e . Ak by sme ku každej hrane na tomto cykle pripočítali hodnotu $a \oplus b$ stále by sme mali cirkuláciu, keďže ku každému vrcholu na cykle sme 2 krát prirátali tú istú hodnotu, čo je v $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ rovné 0. Navyše by sme sa zbavili hodnoty 0 na hrane e , pričom by nikde inde hodnota 0 nevznikla, čím sme dostali hranové farbenie grafu G . Spor. $\square$

2.3 Kempeho prepnutia

V dôkaze Lemy 3 (2) sme využili techniku veľmi podobnú *Kempeho prepnutiam*. Skúsme túto techniku zovšeobecniť.

Kempeho prepnutie je v teórii grafov vymenenie farieb na Kempeho reťazi. Je ľahké si všimnúť, že po Kempeho prepnutí bude ofarbenie hrán stále farbným v grafe.

My zovšeobecníme túto myšlienku aj na cykly, ktoré obsahujú viac farieb. Interpretujme si opäť farbenie ako cirkuláciu v $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Potom Kempeho prepnutie na cykle pozostávajúcom z hrán farieb a, b je

⁵rovnako aj v

zhodné s pričítaním hodnoty $a \oplus b$ ku všetkým hodnotám na hranách cyklu.

Všimnime si však, že po pripočítaní ľubovoľnej hodnoty ku všetkým hranám cyklu sa nepokazí požiadavka na nulový súčet hrán incidentných s ľubovoľným vrcholom v grafe⁶.

Kempeho prepnutia teda zovšeobecníme na pripočítanie ľubovoľnej hodnoty ku všetkým hranám na nejakom cykle. Zovšeobecnené Kempeho prepnutia sa budeme snažiť použiť na presúvanie informácie o kritickosti hrán.

3 Uplatnenie Kempeho prepnutí

Nech hrana e je kritická a a, b, c , sú navzájom rôzne farby a sú rôzne od 0. Z Lemy 2 vieme, že existuje cirkulácia, ktorá má hodnotu 0 práve na hrane e . Ak nájdeme cyklus, ktorý obsahuje hranu e a okrem nej hrany farieb a, b a práve jednu hranu farby c , označme ju f , a spravíme na ňom Kempeho prepnutie s hodnotou c , dostávame cirkuláciu, kde hrana e má farbu c a hrana f má farbu 0, teda z Lemy 1 vieme, že aj hrana f je kritická.

Definícia 2. *Zaujímavý cyklus v cirkulácii c je cyklus s práve jednou hranou hodnoty 0, pre ktorý existuje farba a rôzna od 0 taká, že obsahuje práve jednu hranu tejto farby.*

3.1 Hľadanie zaujímavých cyklov

Vytvoríme teraz algoritmický prístup k hľadaniu zaujímavých cyklov. Opäť rozšírime funkciu solve z Algoritmu 1, ktorá dostane hranu o ktorej sme zistili, že je kritická, a farbenie zvyšných hrán, ktoré sme zistili popri kontrole kritickosti. Chceli by sme nájsť čo najviac zaujímavých cyklov, a teda aj ďalších hrán, ktoré budú kritické.

Nech hrana e spájajúca vrcholy u, v je kritická, potom existuje cirkulácia c , ktorá má hodnotu 0 práve pre hranu e .

Nech hrany iné od e incidentné s vrcholmi u, v sú postupne u_1, u_2, v_1, v_2 . Sú 2 možnosti:

- (1) $c(u_1) \neq c(v_1)$
- (2) $c(u_1) = c(v_1)$

V prípade (1) môžeme hľadať z vrchola u Kempeho reťaz k_1 s farbami $c(u_1), c(v_1)$. Z Lemy 3 vieme, že

Algoritmus 3 Implementácia prístupu 3.1

```

1: function KEMPECYCLE( $u, a, b$ )
2:   return kempecycle from vertex  $u$  of colors  $a, b$ 
3: end function
4: function SWITCH( $k, a$ )
5:   adds  $a$  to all edges on cycle  $k$ 
6: end function
7: function SOLVE( $u, v$ )
8:   if solved( $u, v$ ) then
9:     return
10:  end if
11:  solved( $u, v$ ) = True
12:   $a, b$  = colors of edges incident with  $u, v$ 
13:  if  $a \neq b$  then
14:     $k_u$  = KEMPECYCLE( $u, a, b$ )
15:     $k_v$  = KEMPECYCLE( $v, a, b$ )
16:    for  $x \in k_u \wedge y \in k_v \wedge (x, y) \in \text{edges}$  do
17:       $u \rightarrow x$  = path  $u \dots x$  on  $k_u$ 
18:       $y \rightarrow v$  = path  $y \dots v$  on  $k_v$ 
19:       $c$  = color other than  $a, b$ 
20:      SWITCH( $u \rightarrow xy \rightarrow vu, c$ )
21:      SOLVE( $x, y$ )
22:      SWITCH( $u \rightarrow xy \rightarrow vu, c$ )
23:    end for
24:  else
25:    for  $b' \in \{1, 2, 3\} \wedge b' \neq a$  do
26:       $k_u$  = KEMPECYCLE( $u, a, b'$ )
27:       $k_v$  = KEMPECYCLE( $v, a, b'$ )
28:      for  $x \in k_u \wedge y \in k_v \wedge (x, y) \in \text{edges}$  do
29:         $u \rightarrow x$  = path  $u \dots x$  on  $k_u$ 
30:         $y \rightarrow v$  = path  $y \dots v$  on  $k_v$ 
31:         $c$  = color other than  $a, b'$ 
32:        SWITCH( $u \rightarrow xy \rightarrow vu, c$ )
33:        SOLVE( $x, y$ )
34:        SWITCH( $u \rightarrow xy \rightarrow vu, c$ )
35:      end for
36:    end for
37:  end if
38: end function

```

⁶viď Lema 3 (2)

táto reťaz bude cyklus. Rovnako nájdeme aj Kempeho reťaz k_2 z vrcholu v . Nech u' , v' sú postupne vrcholy z cyklov k_1 , k_2 . Ak existuje hrana $u'v'$, musí byť nenulovej farby rôznej od $c(u_1)$ aj $c(v_1)$. Teda bude spolu s hranou e a časťami vyššie uvedených cyklov tvoriť zaujímavý cyklus.

V prípade (2) si môžeme vybrať ľubovoľnú nenulovú farbu b' rôznu od $c(u_1)$ a nájsť Kempeho cykly z vrcholov u , v s farbami $c(u_1)$, b' . Potom môžeme podobne ako v predošlej možnosti nájsť hrany, ktoré spájajú tieto cykly. Tieto hrany budú kritické.

4 Optimalizácie

Počas testovania sme si zaznamenali možné optimalizácie tohoto postupu, keďže pre niektoré grafy a cirkulácie s jednou nulovou hranou nenájde všetky hrany, ktoré vieme postupnosťou Kempeho prepnutí previesť na nulové.

4.1 Päťuholníky

Do algoritmu môžeme explicitne dodať aj optimalizáciu z Algoritmu 2, keďže sa nám nepodarilo dokázať ani vyvrátiť, že náš postup pre každú hranu na cykle dĺžky 5 pre ktorú zistí, že je kritická, označí aj zvyšné hrany z tohoto cyklu za kritické.

Táto zmena môže zvýšiť efektivitu postupu pre snarky s obvodom 5.

4.2 Kempeho prepnutie pre viac možností

Značné zlepšenia sme zaznamenali, aj ak v odseku 3.1 v možnosti (1) namiesto hľadania Kempeho reťazí s farbami $c(u_1) \neq c(v_1)$, nájdeme Kempeho cyklus, ktorý obsahuje vrchol a a má farby $c(u_1)$, $c(v_1)$ a aplikujeme na neho Kempeho prepnutie s hodnotou $c(u_1) \oplus c(v_1)$. Tak sa dostaneme do stavu z možnosti (2), kde si už môžeme vybrať postupne každú z dvoch zvyšných farieb a hľadať spojenia cyklov pre ne.

Intuitívne sa dostávame do možnosti kde máme väčší výber, takže si určite nepohoršíme, a v praxi môže táto optimalizácia až zniekoľkonásobiť efektivitu pre veľké grafy.

4.3 Test zafarbitelnosti

Napriek tomu, že zmyslom projektu nie je testovať zafarbitelnosť grafu, je to jeho nevyhnutnou súčasťou. Rozhodli sme sa použiť SAT-solvery, ktoré sú verejne dostupné, špeciálne zChaff.

Algoritmus 4 Implementácia prístupu 4.2

```

1: function SOLVE( $u, v$ )
2:   if solved( $u, v$ ) then
3:     return
4:   end if
5:   solved( $u, v$ ) = True
6:    $a, b$  = colors of edges incident with  $u, v$ 
7:   if  $a \neq b$  then
8:      $k_v$  = KEMPECYCLE( $v, a, b$ )
9:     SWITCH( $k_v, a \oplus b$ )
10:  end if
11:  for  $b' \in \{1, 2, 3\} \wedge b' \neq a$  do
12:     $k_u$  = KEMPECYCLE( $u, a, b'$ )
13:     $k_v$  = KEMPECYCLE( $v, a, b'$ )
14:    for  $x \in k_u \wedge y \in k_v \wedge (x, y) \in \text{edges}$  do
15:       $u \rightarrow x$  = path  $u \dots x$  on  $k_u$ 
16:       $y \rightarrow v$  = path  $y \dots v$  on  $k_v$ 
17:       $c$  = color other than  $a, b'$ 
18:      SWITCH( $u \rightarrow xy \rightarrow vu, c$ )
19:      SOLVE( $x, y$ )
20:      SWITCH( $u \rightarrow xy \rightarrow vu, c$ )
21:    end for
22:  end for
23:  if  $a \neq b$  then
24:     $k_v$  = KEMPECYCLE( $v, a, b$ )
25:    SWITCH( $k_v, a \oplus b$ )
26:  end if
27: end function

```

[Moskewicz et al., 2001] Takto vieme aj pre veľké grafy v priebehu pár sekúnd nájsť farbenie, čo pre lepšie algoritmy, ako napríklad Algoritmus 4 vedie k behu len pár sekúnd aj pre snarky o veľkosti 300 – 400 vrcholov.

4.4 Testovacie dáta

Algoritmy popísané v tomto článku sme testovali na veľkom množstve grafov hlavne vo veľkosti 30 – 40 vrcholov. Pre tieto grafy dostatočne rýchlo vieme zistiť zafarbitelnosť, a teda aj kontrolovať korektnosť implementácie. Okrem toho sme efektívnejšie prístupy testovali aj na snarkoch o veľkosti 300 – 400 vrcholov, ktoré tiež vyriešili v priebehu sekúnd.

5 Výsledky

Všetky zlepšenia udávame len pre kritické snarky, nakoľko v praxi pre nekritické aj základný algorit-

mus na prvých pár behov vyskúšal aspoň jednu nekritickú hranu a tým pádom nebolo možné dostatočne porovnávať efektívnosť.

S optimalizačným algoritmom Algoritmus 3 sme zaznamenali až 31-násobné zlepšenie oproti základnému algoritmu.

Optimalizácia z Algoritmu 4 si pre menšie snarky s počtom vrcholov približne 40 vystačí väčšinou s jedným behom Algoritmu na hľadanie farbenia, čo však oproti Algoritmu 3 nedáva veľké percentuálne zlepšenie. Na veľkých snarkoch s počtom vrcholov 300 – 400 sme však zaznamenali ešte približne 8 násobné zlepšenie, pričom v priemere boli potrebné 2 až 3 behy algoritmu pre hľadanie farbenia.

Tabuľka 1: Počet behov algoritmov pre hľadanie farbenia, pre rôzne prístupy a veľkosti snarkov

Veľkosť	Petersen	≤ 26	≤ 36	≤ 400
Počet snarkov	1	100	500	5
Algoritmus 1	15	3831	27000	2604
Algoritmus 2	1	1378	17375	2604
Algoritmus 3	1	123	879	82
Algoritmus 4	1	100	512	12

Záver

Výsledky tejto práce otvárajú nové otázky ako napríklad, ktoré snarky potrebujú viac ako jeden test zafarbitelnosti a prípadné skúmanie ich vlastností.

Našli sme aj ďalšie metódy, ktoré pre niektoré grafy a cirkulácie s práve jednou nulovou hranou môžu nájsť väčšie množstvo hrán, ktoré sa dajú pomocou Kempeho prepnutí prepnúť na nulové, ktoré sú však zložitejšie na implementáciu a časovú zložitosť.

Poďakovanie

Ďakujem Jozefovi Rajníkovi za jeho čas, ochotu, odbornú pomoc a rady, ktoré mi pomohli pri vypracovávaní tejto práce.

Literatúra

[Blanuša, 1946] Blanuša, D. (1946). Problem čtířiju boja. *Glasnik Mat. Fiz. Astr. Ser. II*, 1:31–42.

[Descartes, 1948] Descartes, B. (1948). Network-colourings. *The Mathematical Gazette*, 32:67–69.

[Kászonyi, 1973] Kászonyi, L. (1973). On the structure of coloring graphs. *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, 16:25–36.

[Mazák et al., 2022] Mazák, J., Rajník, J., and Škoviera, M. (2022). Morphology of small snarks. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 29(4):P4.30.

[Mačajová and Škoviera, 2021] Mačajová, E. and Škoviera, M. (2021). Critical and flow-critical snarks coincide. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 41:503–511.

[Moskewicz et al., 2001] Moskewicz, M. W., Madigan, C. F., Zhao, Y., Zhang, L., and Malik, S. (2001). Chaff: Engineering an efficient sat solver. In *Proceedings of the 38th Annual Design Automation Conference (DAC)*, pages 530–535. ACM.

[Seymour, 1979] Seymour, P. D. (1979). Sums of circuits. In Bondy, J. A. and Murty, U. R. S., editors, *Graph Theory and Related Topics*. Academic Press, New York.

[Szekeres, 1973] Szekeres, G. (1973). Polyhedral decomposition of cubic graphs. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 8:367–387.

[Tutte, 1954] Tutte, W. T. (1954). A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Canadian Journal of Mathematics*, 6:80–91.