

1 Definície

1.1 Monadická logika druhého rádu (MSO)

Logika druhého rádu (SO) rozširuje logiku prvého rádu o premenné druhého rádu. Premenná druhého rádu s aritou k predstavuje k -árnu reláciu.

Monadická logika druhého rádu (MSO) je logika druhého rádu, ktorá z premenných druhého rádu obsahuje len tie s aritou 1. Ide teda o premenné, ktoré nám umožňujú kvantifikovať cez množiny premenných prvého rádu. Tieto premenné označujeme veľkými písmenami z konca abecedy. Keďže v tomto texte sa zaoberáme MSO logikou, pod premennými druhého rádu budeme rozumieť len tie s aritou 1.

1.2 Relačný jazyk MSO

Relačný jazyk MSO obsahuje

- nekonečne veľa symbolov pre premenné prvého rádu $(x, y, z, \dots)$
- nekonečne veľa symbolov pre premenné druhého rádu $(X, Y, Z, \dots)$
- symboly pre logické spojky $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$
- symboly pre kvantifikátory $\forall, \exists$
- predikátové symboly
- pomocné symboly - zátvorky

1.3 Formuly

Nech $\mathcal{L}$ je relačný jazyk MSO. Formuly jazyka $\mathcal{L}$ definujeme indukzívne:

- Existujú 2 typy atomických formúl
 - $p(x_1, \dots, x_n)$ kde p je n -árny predikátový symbol jazyka $\mathcal{L}$, a $x_1, \dots, x_n$ sú premenné prvého rádu
 - $x \in X$, kde x je premenná prvého rádu, a X je premenná druhého rádu
- Ak φ a ψ sú formuly, tak aj $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi$ sú formuly.
- Ak φ je formula a x je premenná prvého rádu, tak aj $(\forall x)\varphi$ a $(\exists x)\varphi$ sú formuly.
- Ak φ je formula a X je premenná druhého rádu, tak aj $(\forall X)\varphi$ a $(\exists X)\varphi$ sú formuly.

1.4 Podformuly

1.4.1 Priame podformuly

Najprv definujeme binárnu reláciu *priama_podformula* na formulách. Nech φ, ψ, θ sú formuly. Potom:

- Ak φ má tvar $\neg\psi$, tak $(\psi, \varphi) \in \textit{priama_podformula}$.
- Ak φ má tvar $\theta \vee \psi$, $\theta \wedge \psi$, $\theta \Rightarrow \psi$, tak $(\psi, \varphi) \in \textit{priama_podformula}$ a $(\theta, \varphi) \in \textit{priama_podformula}$
- Ak φ má tvar $(\forall x)\psi$, $(\exists x)\psi$, $(\forall X)\psi$, $(\exists X)\psi$, kde x je premenná prvého rádu, X je premenná druhého rádu, tak $(\psi, \varphi) \in \textit{priama_podformula}$

Žiadne iné formuly v tejto relácii nie sú.

1.4.2 Podformuly

Binárnu reláciu *podformula* na formulách definujeme nasledovne. Nech φ, ψ, θ sú formuly. Potom:

- $(\varphi, \varphi) \in \textit{podformula}$
- Ak $(\varphi, \psi) \in \textit{priama_podformula}$, tak $(\varphi, \psi) \in \textit{podformula}$
- Ak $(\varphi, \psi) \in \textit{podformula}$ a $(\psi, \theta) \in \textit{podformula}$, tak $(\varphi, \theta) \in \textit{podformula}$

Žiadne iné formuly v tejto relácii nie sú.

Hovoríme, že φ je podformulou ψ , ak $(\varphi, \psi) \in \textit{podformula}$

1.5 Voľné premenné

1.5.1 Voľné a viazané výskyty

Hovoríme, že výskyt premennej x prvého alebo druhého rádu vo formule φ je *viazaný*, ak je súčasťou nejakej podformuly formuly φ tvaru $(\exists x)\psi$ alebo $(\forall x)\psi$, kde ψ je podformula φ . Ak výskyt premennej x nie je viazaný, hovoríme, že je *voľný*.

Hovoríme, že premenná x je *viazaná* vo formule φ , ak tam má viazaný výskyt.

Hovoríme, že premenná x je *voľná* vo formule φ , ak tam má voľný výskyt.

1.5.2 Množina voľných premenných

Množinu voľných premenných prvého rádu vo formule φ označujeme $Free^1(\varphi)$, množinu voľných premenných druhého rádu označujeme $Free^2(\varphi)$, a definujeme ich induktívne. Nech ψ, θ sú formuly:

- Ak φ je tvaru $p(x_1, \dots, x_n)$, tak $Free^1(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Free^2(\varphi) = \{\}$

- Ak φ je tvaru $x \in X$, tak $Free^1(\varphi) = \{x\}$, $Free^2(\varphi) = \{X\}$
- Ak φ je tvaru $\neg\psi$, tak $Free^1(\varphi) = Free^1(\psi)$, $Free^2(\varphi) = Free^2(\psi)$
- Ak φ je tvaru $\theta \vee \psi$, $\theta \wedge \psi$, $\theta \Rightarrow \psi$, tak $Free^1(\varphi) = Free^1(\theta) \cup Free^1(\psi)$, $Free^2(\varphi) = Free^2(\theta) \cup Free^2(\psi)$
- Ak φ je tvaru $(\forall x)\psi$, $(\exists x)\psi$, kde x je premenná prvého rádu, tak $Free^1(\varphi) = Free^1(\psi) \setminus \{x\}$, $Free^2(\varphi) = Free^2(\psi)$
- Ak φ je tvaru $(\forall X)\psi$, $(\exists X)\psi$, kde X je premenná druhého rádu, tak $Free^1(\varphi) = Free^1(\psi)$, $Free^2(\varphi) = Free^2(\psi) \setminus \{X\}$

1.5.3 Uzavretá formula

Formulu φ voláme *uzavretá*, ak neobsahuje žiadne voľné premenné prvého ani druhého rádu, teda $Free^1(\varphi) = Free^2(\varphi) = \emptyset$

1.6 Relačná štruktúra

Nech $\mathcal{L}$ je relačný jazyk MSO. Relačná štruktúra $\mathfrak{M}$ je -tica, ktorá obsahuje:

- neprázdnu množinu A nazývanú univerzum.
- n -árnu reláciu $p_{\mathfrak{M}} \subseteq A^n$ pre každý n -árny predikátový symbol p z jazyka $\mathcal{L}$

Takáto relačná štruktúra sa nazýva realizácia jazyka $\mathcal{L}$.

1.7 Ohodnotenie voľných premenných

1.7.1 Premenné prvého rádu

Nech $\mathfrak{M}$ je relačná štruktúra s univerzom A , $\mathcal{V}_1$ je množina voľných premenných prvého rádu. Ohodnotením voľných premenných prvého rádu voláme zobrazenie $e_1 : \mathcal{V}_1 \rightarrow A$.

Ak e_1 je ohodnotenie premenných prvého rádu, x je premenná prvého rádu, a $m \in A$, tak ohodnotenie, ktoré premennej x priradí m , a na ostatných premenných splýva s ohodnotením e_1 označujeme $e_1(x/m)$.

1.7.2 Premenné druhého rádu

Nech $\mathfrak{M}$ je relačná štruktúra s univerzom A , $\mathcal{V}_1$ je množina premenných prvého rádu, $\mathcal{V}_2$ je množina voľných premenných druhého rádu. V MSO ohodnotením voľných premenných druhého rádu voláme zobrazenie $e_2 : \mathcal{V}_2 \rightarrow 2^{\mathcal{V}_1}$.

Ak e_2 je ohodnotenie premenných druhého rádu, X je premenná druhého rádu, a $M \subseteq \mathcal{V}_1$, tak ohodnotenie, ktoré premennej X priradí M , a na ostatných premenných splýva s ohodnotením e_2 označujeme $e_2(X/M)$.

1.8 Pravdivosť formuly

Nech $\mathfrak{M}$ je relačná štruktúra s univerzom A , e_1 je ohodnotenie premenných prvého rádu, e_2 je ohodnotenie premenných druhého rádu, φ je formula. Pravdivosť formuly φ v $\mathfrak{M}$ pri ohodnotení e_1 a e_2 označujeme $\mathfrak{M} \models \varphi[e_1, e_2]$, a definujeme ju nasledovne:

- Ak φ je formula tvaru $p(x_1, \dots, x_n)$ kde p je n -árny predikátový symbol, $x_1, \dots, x_n$ sú premenné prvého rádu, potom $\mathfrak{M} \models \varphi[e_1, e_2]$ ak $(e_1(x_1), \dots, e_1(x_n)) \in p_{\mathfrak{M}}$
- Ak φ je tvaru $\neg\psi$, potom $\mathfrak{M} \models \varphi[e_1, e_2]$ ak $\mathfrak{M} \not\models \psi[e_1, e_2]$
- Ak φ je tvaru $\phi \wedge \psi$, alebo $\phi \vee \psi$ potom $\mathfrak{M} \models \varphi[e_1, e_2]$ ak $\mathfrak{M} \models \phi[e_1, e_2]$ a zároveň $\mathfrak{M} \models \psi[e_1, e_2]$, respektíve $\mathfrak{M} \models \phi[e_1, e_2]$ alebo $\mathfrak{M} \models \psi[e_1, e_2]$
- Ak φ je tvaru $\phi \Rightarrow \psi$, potom $\mathfrak{M} \models \varphi[e_1, e_2]$ ak $\mathfrak{M} \not\models \phi[e_1, e_2]$ alebo $\mathfrak{M} \models \psi[e_1, e_2]$
- Ak φ je tvaru $(\exists x)\psi$ kde x je premenná prvého rádu, potom $\mathfrak{M} \models \varphi[e_1, e_2]$ ak pre nejaké $m \in M$ platí $\mathfrak{M} \models \psi[e_1(x/m), e_2]$
- Ak φ je tvaru $(\forall x)\psi$ kde x je premenná prvého rádu, potom $\mathfrak{M} \models \varphi[e_1, e_2]$ ak pre všetky $m \in M$ platí $\mathfrak{M} \models \psi[e_1(x/m), e_2]$
- Ak φ je $x \in X$, tak $\mathfrak{M} \models \varphi[e_1, e_2]$, ak $x \in e_2(X)$.
- Ak φ je $(\exists X)\psi$, kde X je premenná druhého rádu s aritou 1, tak $\mathfrak{M} \models \varphi[e_1, e_2]$ ak pre nejaké $C \subseteq A$ je $\mathfrak{M} \models \psi[e_1, e_2(X/C)]$.
- Ak φ je $(\forall X)\psi$, kde X je premenná druhého rádu s aritou 1, tak $\mathfrak{M} \models \varphi[e_1, e_2]$ ak pre každé $C \subseteq A$ je $\mathfrak{M} \models \psi[e_1, e_2(X/C)]$.

1.8.1 Pravdivosť uzavretej formuly

Nech φ je uzavretá formula, $\mathfrak{M}$ je relačná štruktúra. Formula φ je pravdivá v štruktúre $\mathfrak{M}$ (označujeme $\mathfrak{M} \models \varphi$) práve vtedy, keď pre každé ohodnotenia voľných premenných prvého a druhého rádu platí $\mathfrak{M} \models \varphi[e_1, e_2]$

1.9 Jazyk MSO na slovách

Jazyk MSO na slovách nad abecedou Σ využíva len špeciálnu množinu predikátových symbolov. Obsahuje:

- binárny predikátový symbol S a unárne predikátové symboly First , Last
- Unárny predikátový symbol a pre každý symbol a z abecedy Σ .

1.10 Slová ako relačné štruktúry

Nech $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ je abeceda, a $w = w_1 \dots w_n$ je slovo, $w_1, \dots, w_n \in \Sigma$. Potom w definuje relačnú štruktúru $\underline{w} = (A, S^w, First^w, Last^w, a_1^w, \dots, a_m^w)$, kde $A = \{1, \dots, n\}$, $a_1^w, \dots, a_m^w$ sú unárne relácie na A také, že pre $i = 1, \dots, m$ platí $a_i^w = \{j \in M \mid w_j = a_i\}$. $S^w = \{(x, y) \in M^2 \mid y = x + 1\}$. $First^w = \{(1)\}$, $Last^w = \{(|w|)\}$.

1.11 $\mathcal{V}$ -štruktúry

Nech $\mathcal{V}_1$ je množina premenných prvého rádu, $\mathcal{V}_2$ je množina premenných druhého rádu, Σ je abeceda. $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ -štruktúrou nad abecedou Σ nazveme slovo $V = (a_1, U_1, T_1) \dots (a_n, U_n, T_n)$ nad abecedou $\Sigma \times 2^{\mathcal{V}_1} \times 2^{\mathcal{V}_2}$, kde platí

$$U_i \cap U_j = \emptyset \text{ pre všetky } i \neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^n U_i = \mathcal{V}_1$$

Nech $V = (a_1, U_1, T_1) \dots (a_n, U_n, T_n)$ je $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ -štruktúra. Prvou projekciou $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ -štruktúry V nazveme slovo $a_1 \dots a_n$ a označujeme ho $pr_1(V)$.

Ku každej $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ -štruktúre jednoznačne prislúcha aj ohodnotenie voľných premenných prvého a druhého rádu. Ku štruktúre $V = (a_1, U_1, T_1) \dots (a_n, U_n, T_n)$ prislúcha ohodnotenie e_1^V , pre ktoré platí

$$e_1^V(x) = a_i \text{ pre každé } x \in U_i, \text{ a pre každé } i$$

Ku tejto $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ -štruktúre prislúcha aj ohodnotenie voľných premenných druhého rádu e_2^V , pre ktoré platí

$$x \in e_2^V(X) \text{ pre každé } x \in U_i, \text{ pre každé } X \in T_i, \text{ a pre každé } i$$

$$\text{do } e_2^V(X) \text{ nepatrí nič iné, pre všetky } X$$

Množinu všetkých $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ -štruktúr nad abecedou Σ nazveme $STRUCT[\Sigma, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$

1.12 Jazyk definovaný MSO formulou

Nech φ je MSO formula, nech $\mathcal{V}_1 = Free^1(\varphi)$, $\mathcal{V}_2 = Free^2(\varphi)$, Σ je abeceda. Potom jazyk definovaný formulou φ je

$$L(\varphi) = \{V \in STRUCT[\Sigma, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2] \mid \underline{pr_1(V)} \models \varphi[e_1^V, e_2^V]\}$$

Ak formula φ je uzavretá, potom

$$L(\varphi) = \{w \in \Sigma^* \mid \underline{w} \models \varphi\}$$

2 Veta: Jazyk je regulárny $\Leftrightarrow$ môže byť opísaný uzavretou formulou v MSO.

2.1 Lema: Jazyk je regulárny $\Rightarrow$ môže byť opísaný uzavretou formulou v MSO.

Nech L je regulárny jazyk. Potom existuje DKA $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ taký, že $L(A) = L$, $K = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$. Majme uzavretú MSO formulu ϕ :

$$\exists X_{q_0}, \dots, \exists X_{q_n}$$

$$\forall x \bigvee_{0 \leq i \leq n} (x \in X_{q_i}) \quad (i)$$

$$\wedge \forall x \bigwedge_{(p \in K)(q \in K)p \neq q} ((x \in X_p) \Rightarrow \neg(x \in X_q)) \quad (ii)$$

$$\wedge \forall x \text{ First}(x) \Rightarrow (x \in X_{q_0}) \quad (iii)$$

$$\wedge \bigwedge_{(p \in K)(q \in K)(a \in \Sigma)} (\forall x)(\forall y)((q = \delta(p, a) \wedge S(x, y) \wedge x \in X_p \wedge a(x) \Rightarrow y \in X_q) \quad (iv)$$

$$\wedge \forall x \text{ Last}(x) \Rightarrow \bigvee_{(p \in K)(q \in F)(a \in \Sigma)} (x \in X_p \wedge a(x) \wedge q \in \delta(p, a)) \quad (v)$$

$$\wedge (X_{q_0} = \emptyset) \Rightarrow (q_0 \in F) \quad (vi)$$

Chceme dokázať, že $L(A) = L(\phi)$

2.1.1 Lema

Následne dokážeme lemu:

Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je DKA, $K = \{q_0, \dots, q_n\}$ a nech $w = w_1 \dots w_k$ kde $w_1, \dots, w_k \in \Sigma, w \neq \varepsilon$. Nech M je univerzum štruktúry $\underline{w}$. Ak pre w a $x \in M$ existujú podmnožiny M : $X_{q_0}^w, \dots, X_{q_n}^w$ také, že platí (i) - (iv), a platí $(q_0, w) \vdash_A^* (q_j, w_x w_{x+1} \dots w_k)$, tak $x \in X_{q_j}^w$.

D: MI na x

1° $x = 1$. Z (iii) $\rightarrow x \in X_{q_0}^w$

2° $x = l \rightarrow x = l + 1$

Ak $(q_0, w_1 \dots w_k) \vdash_A^* (q_j, w_{l+1} \dots w_k)$, tak keďže A je DKA, tak $\exists q_i \in K$ také, že $(q_0, w) \vdash_A^* (q_i, w_l \dots w_k) \vdash_A (q_j, w_{l+1} \dots w_k)$, pričom $\delta(q_i, w_l) = q_j$. Z IP potom platí $l \in X_{q_i}^w$. Z (iv) vieme, že ak $l \in X_{q_i}^w$ a zároveň $w_l^w(l)$ a $S(x, y)$, tak $x \in X_{q_j}^w$.

2.1.2 $w \in L(A) \Rightarrow w \in L(\phi)$

Najprv dokážeme, že ak existujú $q \in K$ a $m \in \mathbb{N}$ také, že $(q_0, w) \vdash_A^m (q, \epsilon)$, tak existujú podmnožiny univerza M štruktúry $\underline{w}$: $X_{q_0}^w, \dots, X_{q_n}^w$ také, že platí (i) - (iv).

D: MI na m:

1° $m = 0$. Ak $(q_0, w) \vdash_A^0 (q, \epsilon)$, tak nutne $q = q_0, w = \epsilon$. Takže (i) - (iv) platí, pretože $M = \emptyset$, a teda v každej časti (i) - (iv) kvantifikujeme všeobecným kvantifikátorom cez prázdnu množinu.

2° $m = k \rightarrow m = k + 1$

Ak $(q_0, w) \vdash_A^{k+1} (q, \epsilon)$, tak keďže A je deterministický, tak posledný krok musel byť na písmeno, a teda $(q_0, uc) \vdash_A^k (q_j, c) \vdash_A (q, \epsilon)$ pre nejaké $q_j \in K, u \in \Sigma^+, c \in \Sigma$ také, že $w = uc$ a zároveň $\delta(q_j, c) = q$. Keďže každý krok bol na písmeno, tak $|w| = k + 1, |u| = k$. Platí $c^w(k + 1)$. Z IP pre u vieme, že existujú $X_{q_0}^u, X_{q_1}^u, \dots, X_{q_n}^u$ také, že platia (i) - (iv). Položme $X_{q_0}^w = X_{q_0}^u, \dots, X_{q_{j-1}}^w = X_{q_{j-1}}^u, X_{q_j}^w = X_{q_j}^u \cup \{k + 1\}, X_{q_{j+1}}^w = X_{q_{j+1}}^u, \dots, X_{q_n}^w = X_{q_n}^u$. Dokážeme, že pre $X_{q_0}^w, \dots, X_{q_n}^w$ a pre všetky $x \in \{1, \dots, k\}$ platí (i) - (iv).

(i) - (iv) pre $x \in \{1, \dots, k\}$

(i) Keďže $u \in L(\phi)$, tak $\forall x \in \{1, \dots, k\} (\bigvee_{0 \leq i \leq k} x \in X_{q_i}^u)$. Keďže $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ platí $X_{q_i}^u \subseteq X_{q_i}^w$, tak platí $\forall x \in \{1, \dots, k\} \bigvee_{0 \leq i \leq k} x \in X_{q_i}^w$.

(ii) Podľa IP $\rightarrow (\forall x \in \{1, \dots, k\}) \bigwedge_{(p \in K)(q \in K)p \neq q} (x \in X_p^u \Rightarrow \neg(x \in X_q^u))$.

Chceme dokázať $\forall x \in \{1, \dots, k\} \bigwedge_{(p \in K)(q \in K)p \neq q} (x \in X_p^w \Rightarrow \neg(x \in X_q^w))$. Môžu nastať 3 možnosti:

1. $X_p^w = X_{q_j}^w$.

Chceme dokázať, že $\forall x \in \{1, \dots, k\} \bigwedge_{(q \in K)(q \neq q_j)} (x \in X_{q_j}^w) \Rightarrow \neg(x \in X_q^w)$.

Ak $x \in \{1, \dots, k\}$, tak $x \neq k + 1$, a teda ak $x \in X_{q_j}^w$ tak $x \in X_{q_j}^u$. Z IP $\rightarrow \bigwedge_{(q \in K)(q \neq q_j)} \neg(x \in X_q^u)$. Ak $q \neq q_j$, tak $X_q^u = X_q^w$, a teda platí $\bigwedge_{(q \in K)(q \neq q_j)} \neg(x \in X_q^w)$.

2. $X_p^w \neq X_{q_j}^w \wedge X_q^w = X_{q_j}^w$

Chceme dokázať, že $\forall x \in \{1, \dots, k\} \bigwedge_{(p \in K)(p \neq q_j)} (x \in X_p^w) \Rightarrow \neg(x \in X_{q_j}^w)$. Z IP platí $\bigwedge_{(p \in K)(p \neq q_j)} (x \in X_p^u) \Rightarrow \neg(x \in X_{q_j}^u)$. Platí, že ak $X_p^w \neq X_{q_j}^w$, tak $X_p^w = X_p^u$, a keďže $X_{q_j}^w = X_{q_j}^u \cup \{k + 1\}$, a $x \neq k + 1$, tak ak $\neg(x \in X_{q_j}^u)$ tak $\neg(x \in X_{q_j}^w)$. Z toho vyplýva $\forall x \in \{1, \dots, k\} \bigwedge_{(p \in K)(p \neq q_j)} (x \in X_p^w) \Rightarrow \neg(x \in X_{q_j}^w)$.

3. $X_p^w \neq X_{q_j}^w \wedge X_q^w \neq X_{q_j}^w$.

Ostáva dokázať, $\forall x \in \{1, \dots, k\} \bigwedge_{(p \in K)(q \in K)(p \neq q \wedge p \neq q_j \wedge q \neq q_j)} (x \in X_p^w) \Rightarrow \neg(x \in X_q^w)$. Keďže z IP platí $\bigwedge_{(p \in K)(q \in K)(p \neq q \wedge p \neq q_j \wedge q \neq q_j)} (x \in X_p^u) \Rightarrow \neg(x \in X_q^u)$, a $(\forall q \in K)((q \neq q_j) \Rightarrow (X_q^u = X_q^w))$, tak tvrdenie platí.

(iii) Z IP vieme, že pre u platí $First(x) \Rightarrow x \in X_{q_0}^u$. Teda ak $|u| \geq 1$, tak $1 \in X_{q_0}^u$. Keďže $X_{q_0}^u \subseteq X_{q_0}^w$, tak $First(x) \Rightarrow x \in X_{q_0}^w$. Ak $|u| = 0$, tak $w = c$. Teda platilo $(q_0, c) \vdash_A^0 (q_0, c)$, a teda $X_{q_0}^w = X_{q_0}^u \cup \{1\} = \{1\}, 1 \in X_{q_0}^w$

(iv) Dokážeme pre všetky $x \in \{1, \dots, k - 1\}$. Keďže $w = uc$, tak $\forall x \in$

$\{1, \dots, k\} \ a^w(x) \Leftrightarrow a^u(x)$. Ak $x \in X_p^w, x \neq k+1$, tak $x \in X_p^u$. Čiže ak $x \in \{1, \dots, k-1\} \wedge a^w(x) \wedge S(x, y) \Rightarrow x \in X_p^u \wedge a^u(x) \wedge S(x, y)$. Ak navyše $\delta(p, a) = q$, tak z IP pre u platí $y \in X_q^u \subseteq X_q^w$, a teda $y \in X_q^w$.

(i) - (iv) pre $x = k + 1$

Teraz dokážeme (i) - (iii) pre $x = k + 1$ a $X_{q_0}^w, \dots, X_{q_n}^w$, a (iv) pre $x = k, x = k + 1$

(i) Keďže $X_{q_j}^w = X_{q_j}^u \cup \{k+1\}$, tak $x \in X_{q_j}^w$.

(ii) Chceme dokázať, že $\bigwedge_{(p \in K)(q \in K)p \neq q} ((x \in X_p^w) \Rightarrow \neg(x \in X_q^w))$ Vieme, že $x \in X_{q_j}^w$. Keďže $(\forall q \in K)((q \neq q_j) \Rightarrow (X_q^w = X_q^u))$, a platí $X_{q_i}^u \subseteq \{1, \dots, k\}$ tak $\forall q((q \neq q_j) \Rightarrow \neg(x \in X_q^w))$. Takže jediný prípad, kedy bude ľavá strana implikácie platiť bude, ak $X_p^w = X_{q_j}^w$. Potom platí, že $\bigwedge_{(q \in K)p \neq q} ((x \in X_{q_j}^w) \Rightarrow \neg(x \in X_q^w))$.

(iii) Jediný prípad kedy bude splnený predpoklad $First(x)$ bude, ak $k = 0$. Potom $|u| = 0$, takže $w = c$. Teda platilo $(q_0, c) \vdash_A^0 (q_0, c)$, a $X_{q_0}^w = X_{q_0}^u \cup \{1\} = \{1\}, 1 \in X_{q_0}^w$.

(iv) Nech $x = k$. Ak $k = 0$, tak predpoklad nie je splnený, pretože $x = 0$. Ak $k \geq 1$ a platí $(q_0, w) \vdash^* (q_j, w_{k+1})$, a A je DKA, tak $\exists q_p \in K$ také, že $(q_0, w) \vdash_A^* (q_p, w_k w_{k+1}) \vdash (q_j, w_{k+1})$, a platí $\delta(q_p, w_k) = q_j$. Keďže platí $(q_0, w_1 \dots w_{k+1}) \vdash_A^* (q_p, w_k w_{k+1})$ a pre $u = w_1 \dots w_k$ platí (i) - (iv), tak podľa lemy $x = k \in X_{q_p}^u \subseteq X_{q_p}^w$. Keďže $x \in X_{q_p}^w$, tak z (ii) vieme, $(\forall q \in K)((q \neq q_p) \Rightarrow \neg(x \in X_q^w))$. Keďže platí $w_k^w(k)$, a na jednej pozícii nemôže byť viac znakov, tak $(\forall a \in \Sigma)((a \neq w_k) \Rightarrow \neg(a^w(k)))$. Teda predpoklad môže platiť len pre $X_p^w = X_{q_p}^w$ a pre $a = w_k$. Vieme, že $(k+1) \in X_{q_j}^w$, a teda ak $y = k+1$, tak $y \in X_{q_j}^w$. Skutočne teda platí $x \in X_{q_p}^w \wedge w_k^w(k) \wedge S(x, y) \Rightarrow y \in X_{q_j}^w$. Ak $x = k+1$, tak neexistuje $y \in X^w$ aby platilo $y = x+1$. A preto predpoklad nikdy nie je splnený, a teda tvrdenie platí.

(v) a (vi)

Teraz dokážeme, že ak $w \in L(A)$, tak pre $X_{q_0}^w, \dots, X_{q_n}^w$ platí (v) a (vi).

Ak $w \in L(A)$, tak platí $(q_0, w) \vdash_A^* (q, \varepsilon)$ pre nejaké $q \in F$. Ak $w = \varepsilon$, tak platí (v), pretože $M = \emptyset$, a teda kvantifikujeme cez prázdnu množinu. Navyše platí $(q_0, \varepsilon) \vdash_A^0 (q_0, \varepsilon)$, a teda $q_0 \in F$, je teda splnená aj (vi).

Ak $w \in \Sigma^+$, tak potom $w = uc$ pre nejaké $u \in \Sigma^*, c \in \Sigma$ a ak A je DKA, tak $\exists p \in K$ take, že $(q_0, uc) \vdash^* (p, c) \vdash (q, \varepsilon)$ a platí $\delta(p, c) = q$. Keďže $q \in F$, tak $\delta(p, c) \in F$. Nech $|w| = k$. Potom platí $c^w(k)$ a $Last^w(k)$, a $\forall l \in X^w(l \neq k)$ neplatí $Last^w(l)$, pretože $k > l$. Keďže pre w platí (i) - (iv), tak z lemy vieme, že $k \in X_p^w$. Teda skutočne platí $\forall x (Last^w(x) \Rightarrow \bigvee_{\delta(p, c) \in F} (x \in X_p^w \wedge c^w(x)))$. Ak $w \neq \varepsilon$, tak $|w| \geq 1$. Potom z (iii) platí, že $1 \in X_{q_0}^w, X_{q_0}^w \neq \emptyset$, a teda v (vi) nie je splnený predpoklad, a tvrdenie platí.

2.1.3 $w \in L(A) \Leftarrow w \in L(\phi)$

Ak $w = \varepsilon$, tak univerzum štruktúry $\underline{w} M$ platí $M = \emptyset$, a teda $X_{q_0}^w = \emptyset$. Z (vi) teda vyplýva, že $q_0 \in F$. Platí $(q_0, \varepsilon) \vdash_A^0 (q_0, \varepsilon)$, a teda $w \in L(A)$.
 $w \in \Sigma^+$. Nech $w = w_1 \dots w_k$. Keďže A je deterministický, tak $\exists q \in K$ také, že $(q_0, w) \vdash_A^* (q, w_k)$. Platí $Last^w(k)$, a vďaka (v) $k \in X_p^w \wedge a^w(k)$ pre nejaké $p \in K$ a $a \in \Sigma$ také, že $\delta(p, a) \in F$. Keďže pre w platí (i) - (iv), tak z lemy $k \in X_{q_i}^w$. Z (ii) vyplýva, že ak $(k \in X_{q_i}^w \wedge k \in X_p^w)$, tak $q_i = p$. Keďže $w = w_1 \dots w_k$, tak platí $w_k^w(k)$ a keďže na jednej pozícii nemôže mať viac písmen, tak $a = w_k$. Takže $\delta(q_i, w_k) = q \in F$. A teda $(q_0, w) \vdash^* (q_i, w_k) \vdash (q, \varepsilon)$ a $q \in F$ a teda $w \in L(A)$.

2.1.4 Záver

Týmto sme dokázali, že slová vyhovujúce MSO formule ϕ sú presne slová, ktoré akceptuje automat A . Takže ak L je regulárny, tak existuje MSO formula, ktorá ho opisuje.

2.2 Lema: Jazyk opísaný ľubovoľnou formulou v MSO je regulárny

Dokážeme najprv všeobecnejšiu lemu, ktorá neplatí len pre uzavreté formuly, ale pre všetky MSO formuly.

Indukciou cez štruktúru formuly pre jazyky nad abecedou Σ , a pre ľubovoľné množiny $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ premenných prvého a druhého rádu a pre ľubovoľnú MSO formulu φ , kde $\mathcal{V}_1 = Free^1(\varphi)$ a $\mathcal{V}_2 = Free^2(\varphi)$ dokážeme, že $L(\varphi)$ je regulárny.

2.2.1 Atomické formuly

Najprv dokážeme, že jazyk všetkých $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ štruktúr nad abecedou Σ , teda jazyk $STRUCT[\Sigma, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ je regulárny.

Jazyk $STRUCT[\Sigma, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ pozostáva zo slov $(a_1, U_1, T_1) \dots (a_n, U_n, T_n)$ nad abecedou $\Sigma \times 2^{\mathcal{V}_1} \times 2^{\mathcal{V}_2}$, pre ktoré platí:

$$U_i \cap U_j = \emptyset \text{ pre všetky } i \neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^n U_i = \mathcal{V}_1$$

Stačí teda konečným automatom overiť, či sa každá premenná prvého rádu z $\mathcal{V}_1$ nachádza vo vstupnom slove práve raz. Keďže množina $\mathcal{V}_1$ je konečná, takýto automat existuje, a preto je jazyk $STRUCT[\Sigma, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ regulárny. Teraz overíme, že ak φ je atomická formula, tak $L(\varphi)$ je regulárny.

φ je $x \in X$

Nech V je $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ štruktúra. Potom platí $pr_1(V) \models \varphi[e_1^V, e_2^V]$ práve vtedy, keď V obsahuje symbol (a, U, T) , kde $a \in \Sigma$, $x \in U$, $X \in T$. Stačí teda konečným automatom overiť, či vstupné slovo patrí do $STRUCT[\Sigma, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$, a či obsahuje

symbol (a, U, T) s danými vlastnosťami.

φ je $S(x, y)$

Nech V je $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ štruktúra. Potom platí $pr_1(V) \models \varphi[e_1^V, e_2^V]$ práve vtedy, keď V obsahuje dva po sebe idúce symboly (a_i, U_i, T_i) a $(a_{i+1}, U_{i+1}, T_{i+1})$, kde $x \in U_i$, $y \in U_{i+1}$. Toto je tiež ľahké overiť konečným automatom.

φ je $First(x)$ alebo $Last(x)$

Stačí konečným automatom overiť, či vstupné slovo patrí do $STRUCT[\Sigma, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$, a či na prvej respektíve poslednej pozícii je symbol (a, U, T) , kde $x \in U$.

φ je $a(x)$

V tomto prípade stačí overiť, či vstupné slovo patrí do $STRUCT[\Sigma, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$, a či sa v symbole obsahujúcom premennú x nachádza na prvej pozícii symbol a . Toto sa konečným automatom dá spraviť, preto $L(\varphi)$ je regulárny.

2.2.2 Zložené formuly

Teraz budeme predpokladať, že tvrdenie platí pre jednoduchšie formuly ϕ a ψ , a dokážeme tvrdenie pre zloženú formulu φ .

φ je $\phi \wedge \psi$

Z definície jazyka $L(\varphi)$ a definície pravdivosti formuly platí

$$L(\varphi) = \{V \in STRUCT[\Sigma, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2] \mid pr_1(V) \models \phi[e_1^V, e_2^V] \wedge pr_1(V) \models \psi[e_1^V, e_2^V]\}$$

a teda

$$L(\varphi) = L(\phi) \cap L(\psi)$$

Z uzáverových vlastností regulárnych jazykov vieme, že jazyk $L(\varphi)$ je regulárny.

φ je $\neg\phi$

V jazyku $L(\varphi)$ budú $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ štruktúry, pre ktoré nie je pravdivá formula ϕ . A teda

$$L(\varphi) = STRUCT[\Sigma, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2] \cap L(\phi)^C$$

Opäť je vďaka uzáverovým vlastnostiam tento jazyk regulárny.

φ je $\phi \vee \psi$, alebo $\phi \Rightarrow \psi$

Ak φ je $\phi \vee \psi$, tak podobne pre $L(\varphi)$ platí

$$L(\varphi) = L(\phi) \cup L(\psi)$$

Ak φ je $\phi \Rightarrow \psi$, tak platí

$$L(\varphi) = L(\neg\phi) \cup L(\psi)$$

Vzhľadom na uzáverové vlastnosti sú oba jazyky regulárne.

2.2.3 Kvantifikátory

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre formulu ϕ s voľnými premennými prvého rádu v množine $\mathcal{V}_1 \cup \{x\}$, a voľnými premennými druhého rádu v množine $\mathcal{V}_2$. Dokážeme, že tvrdenie potom platí aj pre formulu $(\exists x)\phi$ a $(\forall x)\phi$, kde x je premenná prvého rádu

φ je $(\exists x)\phi$

Keďže tvrdenie platí pre ϕ , tak potom $L(\phi)$ je regulárny jazyk. Nech $A = (K, \Sigma \times \mathcal{V}_\infty \cup \{x\} \times \mathcal{V}_2, \delta, q_0, F)$ je DKA taký, že $L(A) = L(\phi)$. Definujeme nový DKA $A' = (K \times \{0, 1\}, \Sigma \times \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2, \delta', (q_0, 0), F \times \{1\})$, kde

$$\begin{aligned} \delta'((q, u), (a, S, T)) &= (\delta(a, S, T), u) && \text{pre } u \in \{0, 1\}, a \in \Sigma, q \in K, T \subseteq \mathcal{V}_2, S \subseteq \mathcal{V}_1, x \notin S \\ \delta'((q, 0), (a, S \setminus \{x\}, T)) &= (\delta(a, S, T), 1) && \text{pre } a \in \Sigma, q \in K, T \subseteq \mathcal{V}_2, S \subseteq \mathcal{V}_1, x \in S \end{aligned}$$

Je vidno, že $w \in L(A')$ práve vtedy, keď existuje slovo w' také, že $w' \in L(A)$, a x sa nachádza v strednom komponente práve jedného symbolu z w' , a teda $L(A) = L((\exists x)\phi)$.

φ je $(\forall x)\phi$

Všeobecný kvantifikátor môžeme chápať ako negáciu existenčného. Čiže pre reálnu štruktúru $\mathfrak{M}$ a ohodnotenia premenných e_1, e_2 platí $\mathfrak{M} \models (\forall x)\phi$ práve vtedy, keď $\mathfrak{M} \not\models (\exists x)\neg\phi$. Takže platí:

$$L((\forall x)\phi) = STRUCT[\Sigma, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2] \cap L((\exists x)\neg\phi)^C$$

Opäť z uzáverových vlastností regulárnych jazykov vyplýva, že $L(\varphi)$ je regulárny.

Teraz dokážeme tvrdenie pre formulu $(\exists X)\phi$ a $(\forall X)\phi$, kde X je premenná druhého rádu

φ je $(\exists X)\phi$

Použijeme podobný argument ako v predchádzajúcej časti. Predpokladáme, že tvrdenie platí pre formulu ϕ s voľnými premennými prvého a druhého rádu v množinách $\mathcal{V}_1$ a $\mathcal{V}_2 \cup \{X\}$. Potom existuje DKA $A = (K, \Sigma \times \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \cup \{X\}, \delta, q_0, F)$ taký, že $L(A) = L(\phi)$. Zostrojíme DKA $A' = (K, \Sigma \times \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2, \delta', q_0, F)$, kde:

$$\delta'(q, (a, S, T \setminus \{X\})) = \delta(q, (a, S, T))$$

Je vidno, že ak automat A akceptoval jazyk $L(\phi)$, tak automat A' akceptuje jazyk $L((\exists X)\phi)$.

φ je $(\forall X)\phi$

Opäť vďaka podobnému argumentu platí:

$$L((\forall X)\phi) = STRUCT[\Sigma, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2] \cap L((\exists X)\neg\phi)^C$$

A teda tento jazyk je tiež regulárny.

2.2.4 Záver

Keďže uzavretá formula je formula, ktorá nemá žiadne voľné premenné, tak dôkaz "Jazyk je regulárny $\Leftrightarrow$ môže byť opísaný uzavretou formulou v MSO" vyplýva z dokázanej lemy.