

Ročníkový projekt
Peter Komoráš

V letnom semestri som analyzoval výsledky programu zo zimného semestra. Vďaka grafickej vizualizácii týchto grafov som objavil taký 18-vrcholový kubický graf, pre ktorý platí, že každé rovnomerné farbenie tohto grafu s dvoma farbami indukujúce jednofarebné podgrafy veľkosti najviac 2 obsahuje aspoň 6 jednofarebných hrán. Zároveň existuje také rovnomerné farbenie dvoma farbami indukujúce jednofarebné podgrafy veľkosti najviac 3, že počet jednofarebných hrán v tomto grafe klesne na 4.

Od tohto grafu som odvodil nekonečnú triedu grafov s touto vlastnosťou. Dané zistenie som aj formálne dokázal.

Def 1

Graf G_k je kubický bezmostový $14 + 2k$ - vrcholový graf, $k \geq 2$

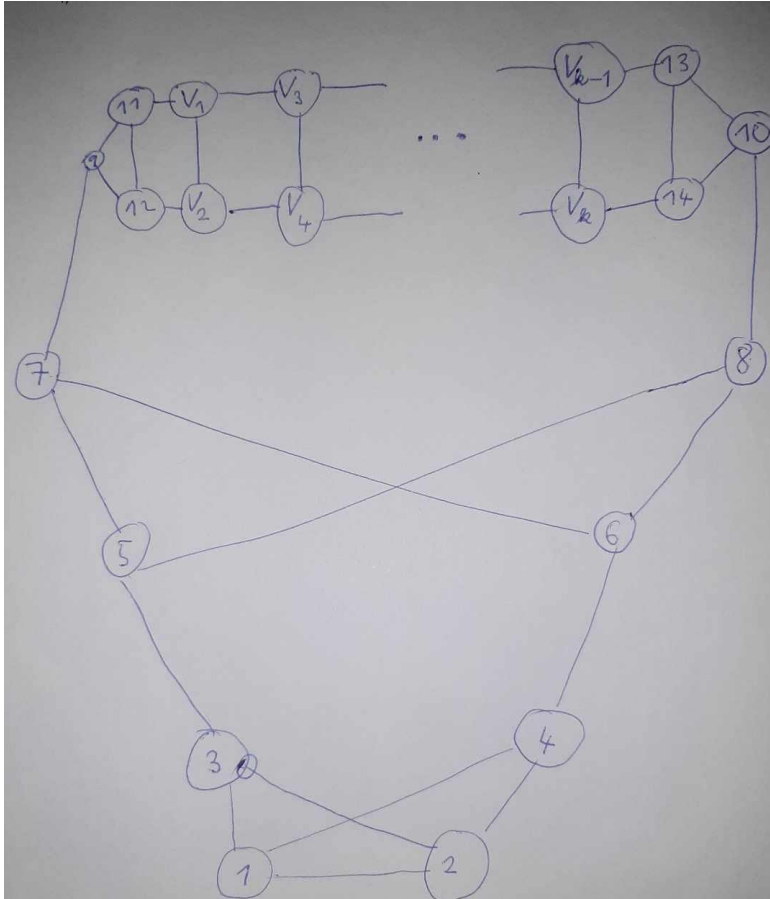
$A = (V, E)$

$V = \{1, 2, 3, \dots, 14\} \cup V_k$

$V_k = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k}\}$

$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 7\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 9\}, \{8, 10\}, \{9, 11\}, \{9, 12\}, \{10, 13\}, \{10, 14\}, \{11, 12\}, \{13, 14\}, \{v_1, 11\}, \{v_2, 12\}, \{v_1, v_2\}, \{v_{2k}, 14\}, \{v_{2k-1}, 13\}, \{v_{2k}, v_{2k-1}\}\} \cup E_k$

$E_k = \{ \{v_a, v_b\} \in V_k \times V_k \mid (a=2i-1 \wedge b=2i) \vee (a=2i-1 \wedge b=2i+1) \vee (a=2i \wedge b=2i+2) \}$



Def 2

Hovoríme, že zobrazenie $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ je rovnomerné farbenie grafu G , ak platí:

$$\forall (u, v) \in E : f(u) \neq f(v) \wedge |f^{-1}(1)| = |f^{-1}(2)| = \dots = |f^{-1}(n)|$$

Def 3

Množina jednofarebných hrán J grafu $G=(V, E)$ je podmnožina E pre zobrazenie f , pričom platí, že hrana je jednofarebná práve vtedy, ak jej oba koncové vrcholy majú rovnakú farbu.

$$\forall \{a, b\} \in E : f(a) = f(b) \Rightarrow \{a, b\} \in J$$

Veta 1

Pre všetky grafy G_k a pre všetky ich rovnomerné farbenia práve dvomi farbami M a C platí, že ak každý podgraf indukovaný jednou farbou má komponenty s najviac dvomi vrcholmi, tak potom pre množinu jednofarebných hrán J platí: $|J| \geq 6$

Dôkaz 1

Vrcholy $\{9, 11, 12\}$ a $\{10, 13, 14\}$ tvoria dve kružnice dĺžky 3. Na každej je jedna JH. Pri farbení nastane jeden z piatich prípadov.

- 1) $f(11) = f(12) = M$
- 2) $f(9) = f(11) = f(10) = f(14) = M$
- 3) $f(9) = f(11) = f(10) = f(13) = M$
- 4) $f(9) = f(11) = M, f(10) = f(13) = C$
- 5) $f(9) = f(11) = M, f(10) = f(14) = C$

(pozn. Kvôli symetrii prípady ako $f(11) = f(12) = C$ alebo $f(11) = f(13) = M$ neuvažujeme.)

1)

$$f(11) = f(12) = M$$

Potom :

$$f(v_{4i-3}) = f(v_{4i-2}) = C$$

$$f(v_{4i-1}) = f(v_{4i}) = M$$

$$(11,12), (v_1, v_2), (v_{k-1}, v_k), (13,14) \in J$$

Zároveň

$$\exists a, b \in \{1,2,3,4\} a \neq b \wedge (a,b) \in J$$

No JH je vždy párny počet, a tak toto farbenie vytvára aspoň 6 JH.

2)

$$f(9) = f(11) = f(10) = f(14) = M$$

Potom platí:

$$f(7) = f(8) = C$$

$$f(5) = f(6) = M$$

Vrcholy V_k tvoria rebrík. Rebrík je bez JH len vtedy, ak $f(v_{4i-3}) = f(v_{4i}) \neq f(v_{4i-2}) = f(v_{4i-1})$

Zároveň, ak rebrík obsahuje JH, tak ich obsahuje aspoň dve, pretože buď

$$f(v_{2i-1}) = f(v_{2i}) \neq f(v_{2i+1}) = f(v_{2i+2}) \text{ alebo}$$

$$f(v_{2i-1}) = f(v_{2i+1}) \neq f(v_{2i}) = f(v_{2i+2})$$

Kružnica tvorená vrcholmi $\{1,2,3\}$ obsahuje JH.

$$|J| = 2j$$

$$X \subset \{1,2,3\}$$

$$\{\{9,11\}, \{10,14\}, X\} \subset J$$

Rebrík obsahuje aspoň 2 JH.

$$|J| \geq 6$$

$$3) f(9) = f(11) = M, f(10) = f(13) = C$$

Symetrické ku 2)

4) $f(9) = f(11) = M$, $f(10) = f(13) = C$ 4

$f(9) = f(11) = M$, $f(10) = f(13) = C$

Potom

$f(7) = C$

$f(8) = M$

Máme na výber z dvoch symetrických možností: $f(5) = M$ alebo $f(6) = M$.

Nech $f(5) = M$

Potom $f(6) = C$

$\{9,11\}, \{10,13\}, \{5,8\}, \{7,6\} \in J$

Zároveň

Kružnica $\{1,2,3\}$ obsahuje JH.

No JH je vždy párny počet, a tak toto farbenie vytvára aspoň 6 JH.

5) $f(9) = f(11) = M$, $f(10) = f(14) = C$ je symetrická ku 4)

Veta 2

Pre všetky grafy G_k existuje rovnomerné farbenie f práve dvomi farbami M a C , pričom platí, že každý podgraf indukovaný jednou farbou má komponenty s najviac dvomi vrcholmi a pre množinu jednofarebných hrán J platí: $|J| = 6$

$f(a) = M$, $a \in \{1,3,6,8,9,11\} \cup \{v_i \in V_k \mid i = 4j-2 \vee i = 4j-1\}$

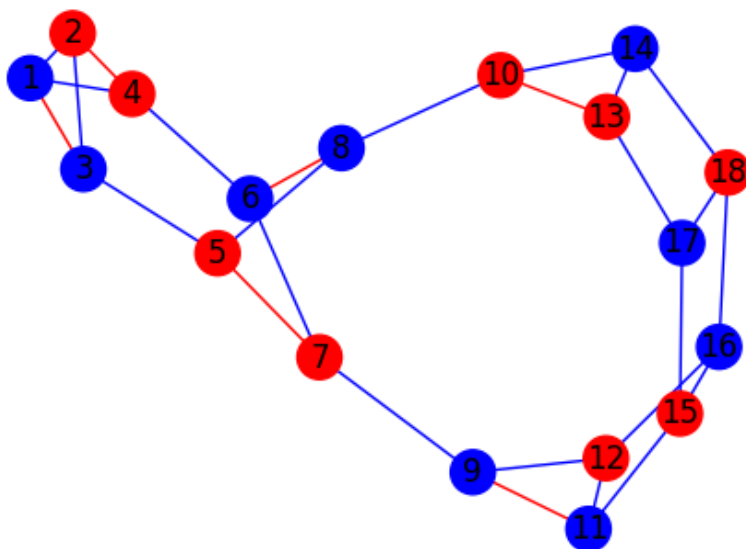
$f(b) = C$, $b \in \{2,4,5,7,10,12\} \cup \{v_i \in V_k \mid i = 4j-3 \vee i = 4j\}$

$f(13) = f(v_k)$

$f(14) = f(v_{k-1})$

$J = \{\{1,3\}, \{2,4\}, \{5,7\}, \{6,8\}, \{10,11\}, \{9,x\}\}$, $x = 13 \vee x = 14$

Farbenie f pre graf G_2



Veta 3

Pre všetky grafy G_k a pre všetky ich rovnomerné farbenia práve dvomi farbami M a C platí, že ak každý podgraf indukovaný jednou farbou má komponenty s najviac tromi vrcholmi, tak potom pre množinu jednofarebných hrán J platí: $|J| \geq 4$

Dôkaz 3

Každá z kružníc tvorená vrcholmi $\{9, 11, 12\}$, $\{10, 13, 14\}$, $\{1, 2, 4\}$ obsahuje aspoň jednu JH.

Počet JH v G_k pri danom farbení je párny.

$$|J| \geq 4$$

Veta 4

Pre všetky grafy G_k existuje rovnomerné farbenie f práve dvomi farbami M a C, pričom platí, že každý podgraf indukovaný jednou farbou má komponenty s najviac tromi vrcholmi a pre množinu jednofarebných hrán J platí: $|J| = 4$

Dôkaz 4

$$f(a) = M, a \in \{1, 5, 6, 9, 10, 11\} \cup \{v_i \in V_k \mid i = 4j-2 \vee i = 4j-1\}$$

$$f(b) = C, b \in \{2, 3, 4, 7, 8, 12\} \cup \{v_i \in V_k \mid i = 4j-3 \vee i = 4j\}$$

$$f(13) = f(v_k)$$

$$f(14) = f(v_{k-1})$$

$$J = \{\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{10, x\}, \{9, 11\}\}, x = 13 \vee x = 14$$

Farbenie f pre G_2

