

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

HIST KOSTRY V KUBICKÝCH GRAFOCH
DIPLOMOVÝ SEMINÁR 1 - REPORT

2026

BC. MATÚŠ LUKÁČ

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Základné pojmy	1
1.2	Motivácia	2
2	Hoffman-Ostenhofova hypotéza a známe výsledky	5
2.1	Formulácia hypotézy	5
2.2	Známe výsledky	6
2.2.1	Planárne kubické grafy	6
2.2.2	Ďalšie triedy kubických grafov	6
2.3	Zjemnenie poslednej zložky rozkladu	7
2.4	Prístupy cez perfektné párenia	7
3	HIST kostry v kubických grafoch	9
3.1	HIST kostry v kubických grafoch	9
3.2	Vybrané výsledky o HIST kostrách	10
3.3	Kostri s malým počtom listov	10
3.4	Vzťah k Hoffmann–Ostenhofovej hypotéze	11
4	Počítačový prístup pre riešenie hypotéz	13
	Literatúra	15

Kapitola 1

Úvod

V tejto kapitole uvedieme základné pojmy a notácie, ktoré budú používané v tomto reporte. Predpokladáme znalosť základných pojmov teórie grafov, avšak pre úplnosť stručne pripomenieme definície, ktoré sú dôležité pre nasledujúce časti.

1.1 Základné pojmy

Grafom rozumieme konečný jednoduchý neorientovaný graf $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholov a E je množina hrán. Stupeň vrcholu $v \in V(G)$, označovaný ako $\deg_G(v)$, je počet hrán incidentných s vrcholom v . Graf nazývame kubickým, alebo 3-regulárnym, ak každý jeho vrchol má stupeň práve tri.

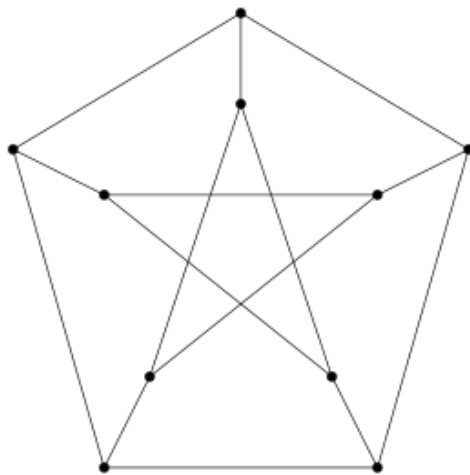
Strom je súvislý graf bez cyklov, ktorý je teda maximálne acyklický a minimálne súvislý. Podgraf T grafu G nazývame kostrou (spanning tree), ak T je strom a obsahuje všetky vrcholy grafu G . Je známe, že každá kostra grafu s n vrcholmi obsahuje práve $n - 1$ hrán.

Párenie v grafe G je podmnožina hrán taká, kde žiadne dve hrany nemajú spoločný vrchol. Ak párenie pokrýva každý vrchol grafu, nazývame ho perfektným párením.

Podgraf nazývame k -regulárnym, ak každý jeho vrchol má stupeň presne k . Konkrétne 2-regulárny graf je nutne disjunktným zjednotením kružníc. Preto sa často označuje aj ako množina kružníc.

Graf G nazývame súvislý, ak medzi každými dvoma vrcholmi existuje cesta. Množinu hrán, ktorej odstránením sa graf nesúvislý, nazývame rez grafu. Rez nazývame cyklický, ak každá z komponent obsahuje cyklus. Graf je cyklicky k -hranovo súvislý, ak každý cyklický rez má veľkosť aspoň k .

Pod rozkladom grafu vo všeobecnosti rozumieme rozdelenie jeho množiny hrán na niekoľko navzájom disjunktných podmnožín tak, aby každá hrana patrila práve do jednej množiny. Každá z týchto podmnožín potom určuje podgraf pôvodného grafu. Rozklady grafov na podgrafy so špecifickými vlastnosťami predstavujú významný ná-



Obr. 1.1: Petersenov graf

stroj pri štúdiu štruktúry grafov.

1.2 Motivácia

Dôležitým prístupom v teórii grafov je skúmanie grafov prostredníctvom ich podgrafov a rôznych typov rozkladov. Rozklad grafu na jednoduchšie štruktúry často umožňuje presnejšie opísať jeho vlastnosti a formulovať všeobecné tvrdenia o jeho štruktúre. V tejto súvislosti sa často študujú rozklady na stromy, párenia alebo regulárne podgrafy, ktoré poskytujú informáciu o globálnych vlastnostiach grafu [3, 4].

Trieda kubických grafov je dostatočne jednoduchá ale zároveň vykazuje bohaté štrukturálne vlastnosti. Vďaka čomu umožňuje formuláciu viacerých typických problémov teórie grafov, ako napríklad problémov týkajúcich sa Hamiltonovských kružníc alebo hranového farbenia. Okrem toho sa mnohé otázky z teórie grafov dajú vhodnými transformáciami alebo redukciami previesť na kubické grafy

Známym príkladom je Petersenov graf, ktorý je kubický, ale zároveň neobsahuje Hamiltonovskú kružnicu a zohráva dôležitú úlohu ako protipríklad v mnohých tvrdeniach [4].

Rozklady regulárnych grafov sa vyskytujú v rôznych podobách. Klasickým príkladom je rozklad grafu na perfektné párenia, ktorý úzko súvisí s hranovým farbením. V prípade kubických grafov je graf 3-hranovo zafarbiteľný práve vtedy, keď jeho množinu hrán možno rozdeliť na tri perfektné párenia [4, 3]. Ďalším často študovaným typom sú rozklady na 2-faktory, ktoré zohrávajú významnú úlohu pri štúdiu Hamiltonovských kružníc a štruktúry regulárnych grafov.

Významnú úlohu pri štúdiu kubických grafov zohrávajú aj výsledky týkajúce sa existencie špeciálnych podgrafov. Tutteho veta o existencii perfektného párenia v kubických grafoch bez mostov [16] patrí medzi základné výsledky z perfektných párení.

V tomto smere nadväzujú aj otázky týkajúce sa rozkladov hrán kubického grafu na podgrafy s rôznymi usporiadaniami, medzi ktoré patrí aj rozklad na kostru, cykly a párenie formulovaný v Hoffmann-Ostenhofovej hypotéze [9].

Pri skúmaní takýchto problémov sa v mnohých prípadoch ukazuje ako užitočné kombinovať teoretické a výpočtové prístupy. Počítačové experimenty umožňujú analyzovať veľké množiny grafov, identifikovať špecifické alebo extrémne prípady a formulovať nové hypotézy, ktoré možno následne teoreticky analyzovať. Tento prístup sa v posledných rokoch stal bežnou súčasťou výskumu v kombinatorike a teórii grafov, napríklad pri experimentálnom štúdiu vlastností kubických grafov a ich rozkladov [12].

Táto diplomová práca zapadá do uvedeného rámca tým, že sa zameriava na štrukturálne vlastnosti kubických grafov súvisiace s existenciou špeciálnych typov kostier a na využitie výpočtových metód pri ich skúmaní.

Kapitola 2

Hoffman-Ostenhofova hypotéza a známe výsledky

Jedným z problémov typu rozkladu kubického grafu je Hoffmann-Ostenhofova hypotéza, ktorá bola formulovaná v roku 2011. Hypotéza sa týka možnosti rozdeliť množinu hrán kubického grafu na tri podgrafy s jednoduchou štruktúrou: kostru, množinu kružníc a párenie. Tieto tri typy podgrafov patria medzi základné štruktúry v oblasti teórie grafov a ich vlastnosti boli intenzívne skúmané v mnohých navzájom rôznych súvislostiach.

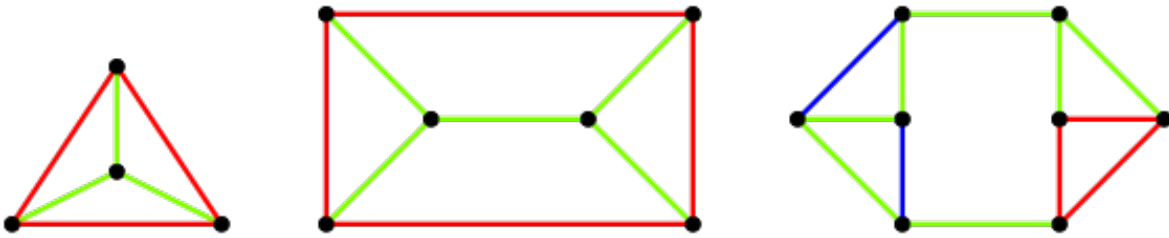
2.1 Formulácia hypotézy

Hypotéza 2.1 (Hoffmann-Ostenhof [8]). *Každý kubický graf možno rozložiť na tri hrano-disjunktné podgrafy: kostru grafu, 2-regulárny podgraf, teda disjunktnú množinou kružníc, a párenie.*

Takýto rozklad sa zvyčajne označuje ako *3-dekompozícia* kubického grafu. Hypotéza teda tvrdí, že hrany ľubovoľného kubického grafu možno rozdeliť na tri časti tak, aby každá z nich mala jednoduchú štruktúru a každá hrana patrila presne do jednej z týchto častí. Nutno podotknúť, že množina kružníc pri takejto dekompozícii je nutne neprázdna ale párenie môže byť prázdne.

Hoffmann-Ostenhofova hypotéza bola dokázaná pre viaceré špeciálne triedy kubických grafov, napríklad pre planárne kubické grafy [9], ako aj pre ďalšie triedy definované štruktúrnymi obmedzeniami. Napriek týmto čiastkovým výsledkom zostáva jej platnosť pre všeobecné kubické grafy otvoreným problémom. Z tohto dôvodu je hypotéza predmetom súčasného výskumu, a to ako z teoretického, tak aj z výpočtového hľadiska.

V nasledujúcich častiach tejto kapitoly stručne zhrnieme známe výsledky týkajúce sa Hoffmann-Ostenhofovej hypotézy a uvedieme triedy kubických grafov, pre ktoré bola jej platnosť dokázaná.



Obr. 2.1: 3-dekompozícia

2.2 Známe výsledky

Hoffmann-Ostenhofova hypotéza je v plnej všeobecnosti otvorená, avšak v literatúre existuje viacero čiastkových výsledkov, ktoré dokazujú jej platnosť pre špeciálne triedy kubických grafov. Typickým prístupom je buď využitie typickej štruktúry danej triedy grafov (napr. planárnosť alebo absencia určitých indukovaných podgrafov), alebo konštruktívny dôkaz, v ktorom sa priamo zostaví požadovaný rozklad.

2.2.1 Planárne kubické grafy

Zásadným výsledkom je dôkaz hypotézy pre planárne kubické grafy. Hoffmann-Ostenhof, Kaiser a Ozeki ukázali, že každý planárny kubický graf pripúšťa 3-dekompozíciu [9]. Tento výsledok je dôležitý aj preto, že táto trieda kubických grafov tvorí prirodzenú a rozsiahlu rodinu grafov, ktorá sa často vyskytuje v aplikáciách aj v teoretických úvahách.

Okrem samotného tvrdenia obsahuje uvedená práca aj viaceré pomocné štruktúrne tvrdenia a techniky, ktoré sa v literatúre využívajú aj pri skúmaní ďalších tried grafov. V kontexte ide o reprezentatívny príklad, kde je hypotéza dokázaná konštruktívne. A teda poskytuje aj intuitívny obraz o tom, prečo rozklad na tieto tri komponenty môže existovať.

2.2.2 Ďalšie triedy kubických grafov

Hypotéza bola dokázaná aj pre ďalšie triedy kubických grafov definované ich štruktúrnymi obmedzeniami. Jedným z príkladov sú *traceable* kubické grafy (t. j. kubické grafy obsahujúce Hamiltonovskú cestu), pre ktoré možno rozklad odvodiť využitím existencie takejto cesty a vhodným doplnením hrán do požadovaných komponentov [13]. Ďalším príkladom sú claw-free kubické grafy, pri ktorých absencia indukovaného podgrafu $K_{1,3}$ poskytuje dodatočnú štruktúru využiteľnú pri konštrukcii rozkladu [14].

2.3 Zjemnenie poslednej zložky rozkladu

Pri skúmaní Hoffmann-Ostenhofovej hypotézy sa v literatúre objavujú aj jej zjemnenia a príbuzné formulácie. Ich význam spočíva v tom, že často poskytujú čiastočné výsledky alebo alternatívne pohľady, ktoré môžu prispieť jednak k lepšiemu pochopeniu štruktúry kubických grafov ale aj samotnému rozkladu ich hranovej množiny.

Jedným z prirodzených zjemnení je oslabenie požiadavky, aby tretia zložka rozkladu bola párenie. Namiesto párenia sa uvažuje množina vrcholovo disjunktných ciest, pričom každá z ciest má najviac dve hrany. V tomto zmysle bolo dokázané, že každý súvislý kubický graf možno rozložiť na kostru, množinu kružníc a takúto množinu vrcholovo disjunktných ciest dĺžky najviac dva [5]. Tento výsledok možno chápať ako oslabenú verziu Hoffmann-Ostenhofovej hypotézy, keďže párenie predstavuje špeciálny prípad, v ktorom majú všetky cesty dĺžku jedna.

2.4 Prístupy cez perfektné párenia

Keďže v kubických grafoch zohrávajú perfektné párenia zásadnú úlohu, prirodzeným smerom je pokúsiť sa odvodiť požadovaný rozklad z vhodne zvoleného perfektného párenia. Po odstránení perfektného párenia z kubického grafu totiž vzniká 2-regulárny podgraf, teda množina kružníc, a problém sa redukuje na konštrukciu kostry z vhodnej podmnožiny zostávajúcich hrán.

Tento prístup systematicky analyzujú Bachtler a Krumke [2]. Vo svojej práci skúmajú podmienky, za ktorých možno z daného perfektného párenia skonštruovať 3-dekompozíciu grafu. Konkrétne študujú štruktúru 2-faktora vzniknutého po odstránení párenia a odvodzujú dostatočné podmienky, za ktorých je možné vybrať podgraf tvoriaci kostru tak, aby zvyšné hrany tvorili požadovanú množinu kružníc. Okrem existencie takéhoto rozkladu uvádzajú aj konštruktívne postupy, ktoré umožňujú takúto dekompozíciu následne zostrojiť pre určité triedy kubických grafov.

Výsledky tohto typu ukazujú, že určité štruktúry predstavujú prirodzený nástroj pri štúdiu Hoffmann-Ostenhofovej hypotézy a že analýza štruktúry grafu po odstránení danej hrán daného podgrafu môže viesť k čiastočným výsledkom a novým prístupom k problému.

Kapitola 3

HIST kostry v kubických grafoch

Ako sme uviedli v predchádzajúcej kapitole, jedným z prístupov k štúdiu Hoffmann-Ostenhofovej hypotézy je skúmanie špeciálnych štruktúr v samotných grafoch, ako tomu bolo pri perfektnom párení. Osobitne významnú úlohu zohrávajú tzv. homeomorficky ireducibilné kostry, ktoré majú výrazne obmedzenú štruktúru. V tejto kapitole uvedieme ich definíciu a vysvetlíme, prečo sú pre náš problém zaujímavé.

3.1 HIST kostry v kubických grafoch

Definícia 3.1. *Nech G je graf a T jeho kostra. Kostru T nazývame homeomorficky ireducibilnou kosterou (HIST), ak neobsahuje žiadny vrchol stupňa dva, teda pre každý vrchol $v \in V(T)$ platí*

$$\deg_T(v) \neq 2.$$

V prípade kubických grafov má definícia HIST kostry jednoduchšiu podobu. Keďže každý vrchol kubického grafu má stupeň najviac tri, preto v takejto kostre kubického grafu má každý vrchol stupeň buď jeden alebo tri.

Táto vlastnosť vedie k jednoduchým vzťahom medzi počtom listov a počtom vnútorných vrcholov. Nech T je HIST kostra kubického grafu s n vrcholmi, L počet listov a I počet vnútorných vrcholov. Zo základných vlastností stromov vyplýva, že

$$L + 3I = 2(n - 1), \quad L + I = n,$$

odkiaľ dostávame

$$L = \frac{n + 2}{2}, \quad I = \frac{n - 2}{2}.$$

Tieto vzťahy ukazujú, že štruktúra HIST kostry v kubickom grafe je silne obmedzená, čo je výhodné pri jej konštrukcii aj pri algoritmickej vyhľadávani.

3.2 Vybrané výsledky o HIST kostrách

Homeomorficky ireducibilné kostry boli študované v rôznych súvislostiach, od všeobecných vlastností kostier v ľubovoľnom grafe až po špeciálne výsledky pre kubické grafy.

Jednou z prvých systematických prác o HIST kostrách je článok Albertsona, Bermana, Hutchinsona a Thomassena [1]. Autori v ňom zavádzajú pojem homeomorficky ireducibilnej kostry a skúmajú podmienky jej existencie vo všeobecných grafoch. Dokazujú napríklad, že grafy s dostatočne veľkým minimálnym stupňom obsahujú HIST kostru a analyzujú triedy grafov, pre ktoré možno existenciu takejto kostry zaručiť pomocou štrukturálnych vlastností grafu.

Špeciálne pre kubické grafy boli HIST kostry podrobnejšie študované v práci Hoffmann–Ostenhof, Noguchi a Ozeki [10]. Jedným z motivujúcich problémov, ktoré autori diskutujú, je otázka, či pre každé kladné celé číslo k existuje cyklicky k -hranovo súvislý kubický graf, ktorý neobsahuje homeomorficky ireducibilnú kostru. Výsledky a diskusia v uvedenej práci ukazujú, že existencia HIST kostry je citlivá na štruktúru grafu a nemožno ju odvodiť iba z parametrov, ako je maximálny či minimálny stupeň vrcholov alebo silná súvislosť.

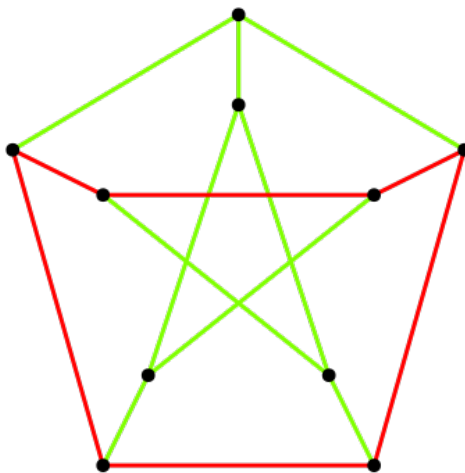
Z hľadiska algoritmickej zložitosti je relevantný aj všeobecný problém hľadania kostier s obmedzeniami na stupne vrcholov. V klasických výsledkoch o ohraničených kostrách v kubických grafoch sa ukazuje, že rozhodovanie o existencii takejto kostry je NP-úplný problém [6]. Keďže HIST kostra v kubických grafoch je špeciálnym prípadom, v ktorej sú stupne vrcholov obmedzené, tak aj určenie HIST kostry je výpočtovo náročný problém.

3.3 Kostri s malým počtom listov

S existenciou HIST kostier úzko súvisí aj všeobecnejší problém : hľadanie kostier s veľkým počtom listov. Tento problém bol intenzívne preskúmaný v rôznych triedach grafov, pretože počet listov do značnej miery určuje štruktúru stromu.

Kleitman a West [11] dokázali všeobecné dolné odhady na počet listov v kostrách súvislých grafov v závislosti od minimálneho stupňa. Ich výsledky ukazujú, že grafy s väčším minimálnym stupňom obsahujú kostry s relatívne veľkým počtom listov. Podporuje to intuíciu, že v hustejších grafoch je jednoduchšie nájsť aj kostry bez vrcholov stupňa dva.

Pre kubické grafy boli podobné otázky študované napríklad Griggсом a Wu [7], ktorí analyzovali maximálny počet listov v kostrách kubických grafov a ukázali, že aj pri silnom obmedzení stupňov vrcholov možno zaručiť existenciu kostier s veľkým počtom listov. Tieto výsledky sú relevantné aj pri štúdiu HIST kostier, keďže takáto kostra v kubickom grafe má presne určený počet listov daný vzťahom uvedeným vyššie.



Obr. 3.1: 3-dekompozícia v Petersenovom grafe indukovaná HIST kostrou

3.4 Vzťah k Hoffmann–Ostenhofovej hypotéze

HIST kostry sú dôležité aj z hľadiska Hoffmann-Ostenhofovej hypotézy. Ukazuje sa totiž, že existencia takejto kostry v kubickom grafe poskytuje prirodzený spôsob, ako zostrojiť požadovaný rozklad hrán. Intuitívne, ak T je HIST kostra grafu G , potom komplement ku kostre T určuje množinu kružníc. Teda HIST kostra jednoznačne určuje 3-dekompozíciu.

Tento vzťah bol poukázaný v práci Hoffmann-Ostenhof, Noguchi a Ozeki [10], kde autori skúmajú podmienky existencie HIST kostier v kubických grafoch a ich vzťah k rozkladom grafov. Výsledky ukazujú, že štúdium HIST kostier predstavuje prirodzený a účinný prístup k skúmaniu Hoffmann-Ostenhofovej hypotézy.

Takže HIST kostry predstavujú prirodzený záujem z hľadiska štúdia štruktúry grafov aj z pohľadu algoritmických problémov. Preto je zaujímavé skúmať ich existenciu a počet najmä v kubických grafoch, ktoré majú dostatočne jednoduchú štruktúru, ale zároveň vykazujú zaujímavé vlastnosti.

Kapitola 4

Počítačový prístup pre riešenie hypotéz

Pri skúmaní štruktúr grafov sa v posledných rokoch častejšie využívajú výpočtové metódy. Typickým prístupom je formulovať problém ako rozhodovací alebo optimalizačný problém a následne použiť všeobecné algoritmické nástroje, napríklad SAT solvers alebo systematické prehľadávanie.

Zhang a Szeider [17] napríklad formulujú problém 3-dekompozície kubického grafu ako problém splniteľnosti (SAT). V ich práci je každá potenciálna hrana priradená k jednej zo zložiek rozkladu a podmienky na kostru, kružnice a párenie sú zapísané vo forme logických klauzúl. Preukázali týmto smerom hypotézu za pravdivú pre všetky kubické grafy do 28 vrcholov. Takýto prístup umožňuje experimentálne testovať existenciu rozkladu pre veľké množiny grafov a analyzovať štruktúru prípadov, v ktorých je hľadanie rozkladu náročné.

Výpočtové prístupy sa používajú aj pri problémoch týkajúcich sa kostier s obmedzeniami. V oblasti tzv. *degree-constrained spanning trees* boli navrhnuté heuristické algoritmy založené na prehľadávaní validných možností hoci problém je vo všeobecnosti výpočtovo náročný [6].

Tieto práce teda ukazujú na kombináciu systematického generovania grafov a algoritmického testovania vlastností ako účinný prístup pri štúdiu problémov.

Literatúra

- [1] Michael O. Albertson, David M. Berman, Joan P. Hutchinson, and Carsten Thomassen. Graphs with homeomorphically irreducible spanning trees. *Journal of Graph Theory*, 14:247–258, 1990.
- [2] Oliver Bachtler and Sven O. Krumke. Towards obtaining a 3-decomposition from a perfect matching. *Electronic Journal of Combinatorics*, 29(4):P4.23, 2022.
- [3] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory*. Springer, 2008.
- [4] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer, 5 edition, 2017.
- [5] Genghua Fan. Hoffmann-ostenhof’s 3-decomposition conjecture. *Discrete Mathematics*, 2025.
- [6] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979.
- [7] J. R. Griggs and M. Wu. Spanning trees in cubic graphs with many leaves. *Journal of Graph Theory*, 1996.
- [8] Arthur Hoffmann-Ostenhof. *Nowhere-zero flows and structures in cubic graphs*. PhD thesis, University of Vienna, 2011.
- [9] T. Hoffmann-Ostenhof, T. Kaiser, and K. Ozeki. Decomposing planar cubic graphs. *Journal of Graph Theory*, 2016.
- [10] Thomas Hoffmann-Ostenhof, Kenta Noguchi, and Kenta Ozeki. On homeomorphically irreducible spanning trees in cubic graphs. *Journal of Graph Theory*, 89(4):393–412, 2018.
- [11] D. J. Kleitman and D. B. West. Spanning trees with many leaves. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 4(1):99–106, 1991.
- [12] Brendan D. McKay and Adolfo Piperno. Practical graph isomorphism, ii. *Journal of Symbolic Computation*, 60:94–112, 2014.

- [13] Kenta Ozeki and Ziqiang Ye. Decomposition of traceable cubic graphs. *arXiv preprint*, 2016.
- [14] Kenta Ozeki and Ziqiang Ye. Decompositions of claw-free cubic graphs. *arXiv preprint*, 2018.
- [15] C. Thomassen. Spanning trees and the number of leaves. *Combinatorica*, 1989.
- [16] W. T. Tutte. The factorization of linear graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, 22:107–111, 1947.
- [17] Tianwei Zhang and Stefan Szeider. The 3-decomposition conjecture: A sat-based approach. In *Proceedings of the International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming*, 2025.