Základy fyziky (1)
Cvičenie 5

Akékoľvek otázky smelo smerujte na
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Cvičenie bolo 9. 11. 2026

Príklad 1 (HW)**.** V tomto príklade bude úlohou dopočítať niekoľko vecí, ktoré sa použili na prednáške.

a. Z vyjadrenia

$$r(\theta) = \frac{L^2/(GMm^2)}{1+\varepsilon\cos\theta} \tag{1}$$

nájdite vzťah pre $\dot{r}$. Nezabudnite, že viete $\dot{\theta} = L/mr^2$. Ukážte, že pre $\theta = 0$ dostaneme $\dot{r} = 0$. To sa dalo očakávať, keďže sme na prednáške zistili že toto je miesto, v ktorom sa teleso nachádza najbližšie k stredu.

Dosaďte r pre $\theta = 0$ do vzťahu pre celkovú energiu (alebo do vzťahu pre efektívny potenciál) a ukážte, že pre energiu telesa platí

$$E = \frac{(GM)^2m^3}{2L^2}\left(\varepsilon^2 - 1\right) \ . \tag{2}$$

b. Ukážte, že z vyjadrenia pre kartézke súradnice $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ dostaneme

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \tag{3}$$

Nájdite hodnoty parametrov x_0, a, b.

c. Ukážte, že pre hlavnú polos elipsy a platí

$$a = -\frac{GMm}{2E} \ . \tag{4}$$

Príklad 2 (HW)**.** Družica sa pohybuje po kruhovej dráhe okolo planéty hmotnosti M vo vzdialenosti H od jej stredu.

a. Aký čas trvá družici jeden obeh okolo planéty?

b. Zistite, v akej v akej výške nad Zemou je tento čas rovný jednému dňu. Premyslite si, že to znamená že družica bude stále nad tým istým miestom na Zemi.[1]

Príklad 3 (■)**.** Máme planétu polomeru R, na povrchu ktorej je teleso hmotnosti m. Akú rýchlosť mu máme udeliť, aby opustilo gravitačné pôsobenie planéty. Preštudujte závislosť tejto rýchlosti od jej smeru vzhľadom na povrch planéty. Čo keď teleso neštartuje z povrchu ale z výšku H nad planétou?

Príklad 4 (■)**.** Máme planétu polomeru R, na povrchu ktorej je teleso hmotnosti m. Akú rýchlosť mu máme udeliť v smere rovnobežnom s povrchom planéty, aby obiehalo kolo planéty po kružnici? Čo ak sme vo výške H nad planétou.

[1] Číselné hodnoty gravitačnej konštanty a hmotnosti zeme rada prezradí Wikipedia.

Príklad 5 (■). Ako vyzerá pohyb telesa, ktoré sme vypustili rýchlosťou väčšou alebo menšou ako prvou kozmickou?

Príklad 6 (HW). Do akej výšky vyletí teleso, ak ho z povrchu planéty vyhodíme prvou kozmickou rýchlosťou? Ako sa zmení odpoveď na túto otázku, ak sa planéta otáča?

Príklad 7 (Stabilita kruhových orbít). Majme potenciál v tvare $V(r) = -km/r^n$.

- Napíšte vzťah pre efektívny potenciál a nájdite podmienku pre jeho extrém.
- Vypočítajte druhú deriváciu efektívneho potenciálu v tomto bode a zistite, za akých podmienok je tento extrém minimom. Interpretujte tento výsledok ako podmienku pre stabilitu kruhovej orbity.

Príklad 8 (Obľúbený triviálny problém II). Študujte pohyb voľného telesa tou istou technikou, ako sme použili na výpočet Keplerovho problému, t.j. prechodom k $u = 1/r$.

Príklad 9 (Obľúbený netriviálny problém II). Prechodom k premennej $u = 1/r$ preštudujte pohyb lineárneho harmonického oscilátora.

Príklad 10 (HW). Ukážte, že v potenciály $V(r) = -mk/r$ je nasledujúci vektor konštantný.

$$\vec{R} = \frac{1}{mk}\dot{\vec{x}} \times \vec{L} - \frac{\vec{x}}{r}.$$

Tomuto vektoru sa hovorí Laplace-Runge-Lentz vektor a je špeciálnou zachovávajúcou sa veličinou pre $1/r$ potenciál. Premyslite si, kam smeruje tento vektor.

Na domácu úlohy vypočítajte dva z príkladov označených HW, zvyšné potom ako bonus.